COMENTARII OLIMPIADA DE MATEMATICĂ 2015
ETAPA NAŢIONALĂ – GIMNAZIU

ABSTRACT. Comments on some of the problems presented at the 2015 National Round of the National Mathematics Olympiad.

Se adresează claselor V, VI, VII, VIII.
Data: 13 aprilie 2015.
Autor: Dan (stâlpnicul) Schwarz, Bucureşti.

The problem is all inside your head,
She said to me;
The answer is easy if you
Take it logically.[1]

0. Introducere

Aceste comentarii asupra Etapei Naţionale a Olimpiadei de Matematică 2015 reflectă, ca de obicei, opinia personală a autorului. Ele sunt adăugate la o prezentare selectivă a probelor de concurs.[2]

Voi indica prin culoarea roşie eventualele erori, sau notaţiile abuzive din enunţurile originale, şi prin culoarea verde varianta de preferat (sau care lipsea din enunţ sau soluţie). Voi folosi în mod predilect şi culoarea albastră pentru comentariile de natură personală.

1. Clasa a V-a

Subiectul (1)**.** *Patru familii prietene au fiecare câte doi copii, şi toţi copiii s-au născut după anul 1989. Anul naşterii mezinilor este acelaşi, având suma cifrelor egală cu produsul cifrelor nenule. Diferenţa de vârstă dintre fraţii aceleiaşi familii este un număr natural de ani exprimat printr-un pătrat perfect nenul. Aflaţi anul anii naşterii fraţilor cei mari din fiecare familie, ştiind că aceştia nu pot avea vârste egale.*

Soluţie. Sub bogatul volum de date din enunţ se ascund doar câteva calcule simple. Dacă anul (comun al) naşterii fraţilor cei mici ar fi în secolul XX (nici părinţii lor nu prea pot fi născuţi în secolul XIX), deci $y = \overline{19ab}$, atunci suma cifrelor ar fi $s \geq 10$, deci măcar unul dintre a, b ar trebui să fie cel puţin 2, altfel produsul cifrelor nenule ar fi $p = 9 < s$.

[1] Paul Simon – Fifty Ways to Leave Your Lover (Still crazy after all these years) https://www.youtube.com/watch?v=MG-0BWLybIQ

[2] Lipsesc unele probleme, la care nu am găsit interesul de a fi prezentate. Soluţiile oficiale, baremele de corectare şi rezultatele finale (după contestaţii) pot fi consultate la http://onm2015.ssmr.ro/

Dar atunci $p \geq 18$, deci măcar unul dintre a, b ar trebui să fie cel puţin 4, altfel $s \leq 16 < p$. Atunci însă $p \geq 36$, iar $s \leq 28$, absurd. Prin urmare faptul că acest an y al naşterii este în secolul XXI decurge şi în absenţa informaţiei că este mai târziu de 1989 (anul Revoluţiei!). Singurele posibilităţi (mai mici decât 2016) sunt deci $y \in \{2000, 2002, 2013\}$. Dar cele mai mici cinci pătrate perfecte nenule sunt $1, 4, 9, 16, 25$. Cum $2002 - 16 = 1986 < 1989$, rămâne că avem $y = \boxed{2013}$, şi deci anii naşterii fraţilor cei mari $\boxed{2012, 2009, 2004, 1997}$ (căci $2013 - 25 = 1988 < 1989$). $\square$

Se poate face o analiză aproape exhaustivă. Căutând numere de $k \leq 4$ cifre **nenule** având suma cifrelor egală cu produsul lor, deosebim cazurile

• $k = 4$; trebuie $a+b+c+d = abcd$, sau $\dfrac{1}{abc} + \dfrac{1}{bcd} + \dfrac{1}{cda} + \dfrac{1}{dab} = 1$. Se poate chiar uşor determina că singura soluţie este $\{1, 1, 2, 4\}$.

• $k = 3$; trebuie $a+b+c = abc$, sau $\dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ca} = 1$. Se ştie că singurele soluţii sunt $\{ab, bc, ca\} = \{3, 3, 3\}$, imposibil, sau $\{ab, bc, ca\} = \{2, 4, 4\}$, imposibil, sau în fine $\{ab, bc, ca\} = \{2, 3, 6\}$, care duce la $\{a, b, c\} = \{1, 2, 3\}$.

• $k = 2$; trebuie $a + b = ab$, sau $(a-1)(b-1) = 1$, de unde $a = b = 2$.

• $k = 1$; orice cifră nenulă a este bună (în particular $a = 2$).

Singurii astfel de ani y din mileniile al doilea şi al treilea sunt deci

$$1000, 1023, 1032, 1203, 1230, 1302, 1320, 1124, 1142, 1214, 1241, 1412, 1421,$$

$$2000, 2002, 2020, 2200, 2013, 2031, 2103, 2130, 2301, 2310, 2114, 2141, 2411.$$

Dar între 1989 şi 2015 sunt atât de puţine valori, că puteau fi examinate "cu mâna", una după alta. Precizarea "familii prietene" îmi aduce aminte de comentariul făcut de mine la Problema 4, Faza Locală a municipiului Bucureşti.[3]

Subiectul (2)**.** *Determinaţi cel mai mic număr natural care are exact* 2015 *divizori pozitivi.*

Soluţie. În principiu ar fi trebuit spus "divizori pozitivi", dar cum dacă numărăm şi divizorii negativi obţinem întotdeauna un număr par, omisiunea este benignă (de altfel soluţia oficială chiar face menţiunea că se calculează numărul divizorilor **naturali**).

Pentru $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$ avem $\tau(n) = (e_1+1)(e_2+1)\cdots(e_k+1)$. Deoarece $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$, înseamnă că putem avea doar cazurile

$$n \in \{p_1^{2014}, p_1^{402}p_2^4, p_1^{154}p_2^{12}, p_1^{64}p_2^{30}, p_1^{30}p_2^{12}p_3^4\}.$$

Este clar că, deoarece căutăm un cel mai mic astfel de număr n, trebuie $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$; şi deoarece evident

$$2^{2014} > 2^{402}3^4 > 2^{154}3^{12} > 2^{64}3^{30} > 2^{30}3^{12}5^4,$$

rezultă $n = \boxed{2^{30}3^{12}5^4}$. $\square$

[3]Familiarismul prietenos ar trebui să-şi impună singur anumite limite. Dar ce? familiile **duşmane** Capulet şi Montagu din Verona trebuie excluse?

Subiectul (3)**.** *Se spune că numărul natural $n \geq 2$ este **norocos** dacă numărul n^2 se poate scrie ca suma a n numere naturale nenule consecutive. Să se arate că:*

a) numărul 7 este norocos;
b) numărul 10 nu este norocos;
c) produsul oricăror două numere norocoase este un număr norocos.

Soluţie. Toată problema revine la simplul fapt că n este norocos dacă şi numai dacă este impar (restricţia $n \geq 2$ este inutilă). Următoarele ecuaţii sunt echivalente, $n^2 = (k+1) + (k+2) + \cdots + (k+n) = nk + n(n+1)/2$ şi $n = 2k+1$. Soluţia oficială se lungeşte, parcă pentru a justifica "dificultatea" problemei. Enunţul ascunde adevărul plin (un văl de penumbră). □

Subiectul (4)**.** *Pe tablă sunt scrise, unul după altul, opt numere egale cu 0. Numim **operaţie** modificarea a patru dintre cele opt numere, astfel: două numere se măresc cu 3, un număr se măreşte cu 2, iar cel de al patrulea număr se măreşte cu 1.*

a) Care este numărul minim de operaţii pe care trebuie să le efectuăm pentru a obţine pe tablă opt numere naturale consecutive.?

b) Este posibil ca, după un număr de operaţii, toate numerele scrise pe tablă să fie egale cu 2015?

c) Este posibil ca, în urma unei succesiuni de operaţii, produsul numerelor de pe tablă să fie 2145?

Soluţie. La fiecare operaţie suma numerelor scrise pe tablă creşte cu valoarea $2 \cdot 3 + 2 + 1 = 9$, deci după k operaţii valoarea sumei este $9k$.

a) Cea mai mică sumă a opt numere naturale consecutive este evident $0 + 1 + \cdots + 7 = 28$, care nefiind un multiplu de 9 nu se poate obţine. Următoarea cea mai mică sumă a opt numere naturale consecutive este $1+2+\cdots+8 = 36 = 9 \cdot 4$, care în principiu se poate obţine după 4 operaţii; un model este **obligatoriu** şi poate relativ uşor fi exhibat, de exemplu

$$\begin{bmatrix} (1) & 1 & 2 & 3 & 3 & \circ & \circ & \circ & \circ \\ (2) & \circ & \circ & \circ & 1 & \circ & 3 & 3 & 2 \\ (3) & \circ & \circ & \circ & \circ & 2 & 1 & 3 & 3 \\ (4) & \circ & \circ & \circ & \circ & 3 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

b) Dacă toate numerele scrise pe tablă ar fi egale cu 2015 la un moment dat, suma lor ar fi $8 \cdot 2015$, care nu este un multiplu de 9, deci această configuraţie nu se poate obţine.

c) $2145 = 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13$. Dintre toate combinaţiile de opt numere naturale cu produsul 2145, singura pentru care suma lor este multiplu de 9 este $1+1+1+1+3+5+11+13 = 36 = 9 \cdot 4$, dar din 4 operaţii se poate obţine cel mult $4 \cdot 3 = 12 < 13$. Prin urmare răspunsul este nu. □

În mod neaşteptat (oare?), subiectul 2 a fost cel mai slab punctat (printre cei cu cele mai mari 13 scoruri). Punctajul maxim la clasă a fost 25.

2. Clasa a VI-a

Subiectul (1). *Determinaţi numerele naturale care au proprietatea că admit exact* 8 *divizori pozitivi, dintre care trei sunt numere prime de forma* a, $\overline{bc}$ *şi* $\overline{cb}$, *şi* $a+\overline{bc}+\overline{cb}$ *este pătrat perfect, unde* a, b *şi* c *sunt cifre cu* $b<c$.

Soluţie. Deoarece evident cele trei numere (prime) a, $\overline{bc}$ şi $\overline{cb}$ sunt distincte, înseamnă că numărul căutat este produsul lor.[4] Acum, numerele prime de cel mult două cifre sunt

$$2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89,97,$$

deci continuarea se poate face prin **simplă exhaustiune a cazurilor** (cum o face de altfel chiar soluţia oficială). Faptul că singura soluţie ajunge a fi $\boxed{2015=5\cdot 13\cdot 31}$ arată cum a fost construită această **non-problemă**.[5] □

Subiectul (2).

a) Determinaţi numerele naturale a *pentru care*

$$\frac{1}{4}<\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a+3}<\frac{1}{3}.$$

b) Demonstraţi că pentru orice număr natural $p\geq 2$ *există* p *numere naturale consecutive* $a_1,a_2,\ldots,a_p$ *astfel încât*

$$\frac{1}{p+1}<\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_p}<\frac{1}{p}.$$

Soluţie.

a) Avem $\frac{1}{4}<\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a+3}<\frac{3}{a+1}$, de unde $a<11$, şi pe de altă parte $\frac{1}{3}>\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a+3}>\frac{3}{a+2}$ (din AM/HM), de unde $a>7$. Se calculează uşor că toate trei valorile $\boxed{a\in\{8,9,10\}}$ sunt soluţii.

b) Nu e greu de "ghicit" că numerele $a_k=p^2+k$, pentru $1\leq k\leq p$, verifică. Pe de o parte

$$\frac{1}{p^2+1}+\frac{1}{p^2+2}+\cdots+\frac{1}{p^2+p}<\frac{p}{p^2+1}<\frac{p}{p^2}=\frac{1}{p},$$

iar pe de altă parte

$$\frac{1}{p^2+1}+\frac{1}{p^2+2}+\cdots+\frac{1}{p^2+p}>\frac{p}{p^2+p}=\frac{1}{p+1}.$$

După cum se vede deja la punctul a), această soluţie nu este unică (se poate arăta uşor că există cel puţin o altă soluţie pentru orice $p\geq 2$). □

[4] Pentru $n=p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_k^{e_k}$ avem $\tau(n)=(e_1+1)(e_2+1)\cdots(e_k+1)$.

[5] Un alt element care merită comentat este faptul că, dat fiind că enunţul este simetric în b şi c, se putea doar da $b\neq c$ în loc de $b<c$. De fapt se putea renunţa chiar şi la această condiţie, căci se subînţelege că cei trei divizori primi despre care este vorba sunt distincţi, ceea ce forţează $b\neq c$.

Subiectul (3)**.** *Arătaţi că dacă x, y şi n sunt numere naturale astfel încât*

$$n = \frac{x^2-1}{2} = \frac{y^2-1}{3},$$

atunci

a) $n = y^2 - x^2$*;*

b) n *este multiplu de* 20*.*

Soluţie.

a) $n = 3n - 2n = (y^2-1) - (x^2-1) = y^2 - x^2$.

b) Din $2n = x^2 - 1$ rezultă x impar, deci $x^2 - 1$ este multiplu de 8, aşadar n este multiplu de 4. Din $3n = y^2 - 1$ rezultă y impar, deci şi $y^2 - 1$ este multiplu de 8, aşadar $n = (y^2-1) - (x^2-1)$ este chiar multiplu de 8. Avem şi $x^2 + y^2 = 5n + 2$. Deoarece resturile la împărţirea cu 5 a unui pătrat perfect pot fi doar 0, 1 sau 4, singura posibilitate este ca ambele x^2 şi y^2 să dea restul 1 la împărţirea cu 5, dar atunci $n = y^2 - x^2$ este şi multiplu de 5.

Prin urmare am obţinut, fără prea mare efort, un rezultat chiar **mai puternic** decât cel cerut, anume că $\boxed{n \text{ este multiplu de } \mathbf{40}}$. Deoarece avem $40 = \dfrac{9^2-1}{2} = \dfrac{11^2-1}{3}$, nu se poate spune nimic mai mult. □

Subiectul (4)**.** *Se consideră un triunghi ABC în care*

$$\mathrm{m}(\angle BAC) = \frac{4}{3}\,\mathrm{m}(\angle ABC) < 90^\circ.$$

Fie $(AE$ *bisectoarea unghiului* $\angle BAC$*, cu* $E \in (BC)$*, şi fie punctul* $F \in (AE$ *astfel încât* $\mathrm{m}(\angle ABF) = \dfrac{1}{2}\mathrm{m}(\angle BAC)$ *şi.* ***Se dă faptul că*** $[AF] \equiv [AC]$*. Determinaţi măsura unghiului* $\angle BCF$*.*

Soluţie. (L. Ivanovici) Se alege punctul (unic determinat) N, de cealaltă parte a dreptei AE decât punctul C, pentru care $\triangle AFN$ este echilateral. Construcţia aceastui punct N permite un lanţ de raţionamente de tipul ”angle chasing”, datorate numeroaselor triunghiuri isoscele formate, care culminează cu determinarea $\mathrm{m}(\angle BCF) = 30^\circ$. În final rezultă chiar că şi $\triangle BCN$ este echilateral. □

Cu astfel de probleme paternalistice este greu de stabilit un clasament credibil şi veridic al valorilor. De departe, problema 4 a fost cea care a departajat concurenţii pentru locurile fruntaşe (doar trei sau patru scoruri de 6/7). Salut clasarea pe poziţiile cele mai înalte a Aminei (Abu-Shanab) şi a lui (Tran Bach) Tac, pe care îi îndrăgesc în mod particular. Ei s-ar fi calificat şi în lotul lărgit de Juniori, dacă nu se aplica o jumătate de măsură.

Clasele a V-a şi a VI-a îşi încheie aici competiţia; nu există o fază ulterioară, de calificare pentru concursuri internaţionale.

---

3. CLASA A VII-A

Subiectul (2)**.** *Determinaţi* $n \in \mathbb{N}$ *astfel încât numerele* $n+8$, $2n+1$, $4n+1$ *să fie simultan cuburi perfecte.*

Soluţie. Cheia provine din faptul că $1 \cdot 2 \cdot 4 = 2^3$ (cub perfect), şi din faptul că produsul celor trei numere trebuie să fie **şi** el un cub perfect k^3. Calculăm

$$k^3 = (n+8)(2n+1)(4n+1) = 8n^3 + 70n^2 + 49n + 8,$$

şi încercăm să încadrăm între două cuburi perfecte consecutive. Evident, pentru orice n natural,

$$k^3 < (2n+6)^3 = 8n^3 + 72n^2 + 216n + 216,$$

dar şi, pentru orice $n \geq 12$ natural,

$$k^3 > (2n+5)^3 = 8n^3 + 60n^2 + 150n + 125.$$

Rămân de verificat numerele naturale $0 \leq n \leq 11$, unde evident doar $\boxed{n = 0}$ convine.

Soluţia oficială încadrează, în mod ciudat, între $(2n+2)^3$ şi $(2n+6)^3$, prelungind chinul şi agonia. **Niciun punctaj peste 4**; în absenţa ideii de a considera **produsul** celor trei numere drept cub perfect şi el, alte consideraţii se pot dovedi laborioase şi fără finalitate. De fapt nici măcar două dintre numere nu pot fi netrivial simultan cuburi perfecte, dar intrăm aici în teoria curbelor eliptice. $\square$

Subiectul (4)**.** *Determinaţi numerele prime distincte* p, q, r *şi* s *care verifică relaţia*

$$1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} - \frac{1}{r} - \frac{1}{s} = \frac{1}{pqrs}.$$

Soluţie. Să ignorăm primalitatea numerelor, şi să considerăm doar că acele numere sunt distincte (şi **pozitive**)!

Scriind relaţia dată ca $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{pqrs} = 1$, metoda clasică este de a determina valorile maxime posibile ale celor două mai mici dintre numere. Evident trebuie $p > 1$. Fie $1 < p < q < r < s$. Pentru $p \geq 3$ avem

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \frac{1}{pqrs} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} < 1,$$

deci $p = 2$. Pentru $q \geq 6$ avem

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \frac{1}{2qrs} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} < 1,$$

deci $3 \leq q \leq 5$. Acum

- pentru $q = 5$ relaţia se scrie $(3r - 10)(3s - 10) = 103$, fără soluţie;
- pentru $q = 4$ relaţia se scrie $8r + 8s + 1 = 2rs$, fără soluţie;
- pentru $q = 3$ relaţia se scrie $(r-6)(s-6) = 37$, cu soluţia unică (în care,

din pură coincidenţă, numerele sunt prime) $\boxed{\{p, q, r, s\} = \{2, 3, 7, 43\}}$.

Enunţarea primalităţii nu poate deci avea decât efectul pernicios de a sugera raţionamente prin divizibilitate, care nu prea duc nicăieri. Efectul realizat este cel de ”a pune căruţa înaintea boilor”; din faptul că ecuaţia în numere naturale nenule distincte are doar o unică soluţie, unde toate cele patru numere rezultă chiar **prime**, hai să punem acest fapt în enunţ, **înainte** de a se rezolva ecuaţia. O remarcă suplimentară, legată ca şi mai sus, de problema 2, clasa a V-a; numere ca $-2, -7, -101$ sunt şi ele prime, chiar dacă negative. În aceste condiţii, aşa cum a fost enunţată problema, există de exemplu şi soluţia ”parazită” care foloseşte şi numere negative $\{p, q, r, s\} = \{2, 3, 5, -31\}$, cu valori toate prime. □

4. CLASA A VIII-A

Subiectul (1)**.** *Arătaţi că pentru orice numere reale pozitive a, b, c cu $a+b+c=3$ are loc inegalitatea:*

$$2(ab+bc+ca)-3abc \geq a\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}+b\sqrt{\frac{c^2+a^2}{2}}+c\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Soluţie. Ideea soluţiei oficiale are o anume motivaţie, anume să ”scăpăm” de incomozii radicali. În esenţă, ea exprimă faptul că pentru $x, y > 0$

$$\frac{x+y}{2} \geq \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}+\frac{2}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}\right),$$

adică, notând $M_A(x,y)=\dfrac{x+y}{2}$ media aritmetică, $M_Q(x,y)=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}$ media pătratică, $M_H(x,y)=\dfrac{2}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}$ media armonică a două numere reale pozitive x, y, pentru care evident $M_Q(x,y) \geq M_A(x,y) \geq M_H(x,y)$, faptul că avem $\boxed{M_Q(x,y)-M_A(x,y) \leq M_A(x,y)-M_H(x,y)}$. Acest rezultat este probabil destul de bine cunoscut în anumite cercuri, dar n-ar fi stricat să fi fost cerut printr-un punct preliminar întrebării principale. Odată această inegalitate evidenţiată, demonstraţia nu este grea, şi conduce imediat (prin ”spargere”) la inegalitatea suficientă

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \geq \frac{(1+1+1)^2}{2(a+b+c)}=\frac{3}{2},$$

din ”versiunea Titu” a inegalităţii Cauchy-Schwarz. Egalitate se obţine doar pentru $a=b=c=1$.

Restricţia $a, b, c > 0$ este necesară pentru inegalităţile ajutătoare de mai sus, dar este clar că dacă admitem şi valori 0 pentru a, b sau c, inegalitatea se păstrează. Rezultatele – fapt de aşteptat – au fost nespus de slabe. □

Subiectul (3)**.** *Se notează cu $p(a)$ prima cifră a numărului natural a. Arătaţi că fiecare dintre mulţimile*

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid p(5^n) - p(2^n) > 0\} \quad \text{şi} \quad B = \{n \in \mathbb{N} \mid p(5^n) - p(2^n) < 0\}$$

conţine o infinitate de elemente.

Soluţie. Să notăm şi cu $\ell(a)$ numărul de cifre din scrierea zecimală a lui a; atunci $p(a)10^{\ell(a)-1} \leq a < (p(a)+1)10^{\ell(a)-1}$, cu inegalitate strictă dacă $a > 10$ şi $10 \nmid a$. În particular, pentru $n > 1$,

$$p(2^n)p(5^n)10^{\ell(2^n)+\ell(5^n)-2} < 2^n 5^n < (p(2^n)+1)(p(5^n)+1)10^{\ell(2^n)+\ell(5^n)-2}.$$

Dacă $\min\{p(2^n), p(5^n)\} \geq 2$ şi $\max\{p(2^n), p(5^n)\} \geq 5$ vom avea atunci

$$10^{\ell(2^n)+\ell(5^n)-1} < 10^n < 10^{\ell(2^n)+\ell(5^n)},$$

adică $\ell(2^n) + \ell(5^n) - 1 < n < \ell(2^n) + \ell(5^n)$, o contradicţie. Aşadar, dacă $p(5^n) \geq 5$, rezultă $p(2^n) = 1 < p(5^n)$, şi în mod similar, dacă $p(2^n) \geq 5$, rezultă $p(5^n) = 1 < p(2^n)$.

Dar acum, $p(5^{n_k}) = 1$ duce evident la $p(5^{n_k+1}) \geq 5$, deci $p(2^{n_k+1}) = 1$, ceea ce duce la $p(2^{n_k+3}) \geq 4$; dacă $p(2^{n_k+3}) = 4$, atunci $p(2^{n_k+4}) \geq 8$. Aceasta înseamnă că pentru $n_{k+1} = n_k + 3$ sau $n_{k+1} = n_k + 4$ vom avea $p(2^{n_{k+1}}) \geq 5$, ceea ce duce la $p(5^{n_{k+1}}) = 1$, şi procedura continuă inductiv, începând cu $n_0 = 3$. O problemă frumoasă, nu chiar banală, numai bună pentru departajarea concurenţilor. $\square$

Soluţie Alternativă. Este cunoscut faptul că, pentru orice număr natural a care nu este o putere a lui 10, şi pentru orice număr natural nenul N, există o infinitate de puteri ale lui a care să aibă drept prime cifre cele ale lui N. Demonstraţia acestui fapt nu este chiar uşoară, dar poate fi făcută cu metode relativ elementare. Atunci, luând $N = 1$, există o infinitate de puteri 2^n cu $p(2^n) = 1$, deci $p(5^n) \geq 5$, dar şi o infinitate de puteri 5^n cu $p(5^n) = 1$, deci $p(2^n) \geq 5$. Cu această metodă se poate arăta că şi mulţimea

$$C = \{n \in \mathbb{N} \mid p(5^n) - p(2^n) = 0\}$$

este infinită. Vă las plăcerea să încercaţi o (rapidă) demonstraţie ... $\square$

Subiectul (4)**.** *În tetraedrul regulat $ABCD$ se duc plane paralele la feţele sale, astfel încât fiecare muchie este partiţionată în 6 segmente congruente. Aceste plane determină pe feţele, muchiile şi în interiorul tetraedrului o mulţime de 80 de puncte de intersecţie, notată V. Determinaţi numărul maxim de elemente ale unei submulţimi W a mulţimii $V \cup \{A, B, C, D\}$, care are proprietatea că oricare trei puncte distincte din W sunt necoliniare, iar planul determinat de aceste puncte nu este paralel (şi nici nu coincide) cu niciuna dintre feţele tetraedrului $ABCD$.*

Soluţie. Problema nu este geometrie în spaţiu, ci combinatorică deghizată. Dar formularea geometrică ascunde o capcană – există (infinit de multe) puncte de intersecţie a numai două dintre plane, care evident nu vor trebui considerate, în spiritul **intenţionat** al problemei.

Dacă luăm în consideraţie şi planele feţelor, atunci mulţimea V este cea a celor 80 de puncte de intersecţie **cvadruplă** a planelor în chestiune, puncte cărora le vom asocia coordonate volumice.

Asocierea fiecărui punct din mulţimea $X = V \cup \{A, B, C, D\}$ cu cele patru distanţe la feţele tetraedrului revine la considerarea unei mulţimi izomorfe

$$X = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6\}.$$

Mulţimea X are $84 = \binom{9}{3}$ puncte, căci acum calculul se reduce la numărarea descompunerilor $6 = a+b+c+d$, unde a, b, c, d sunt toate numere naturale.

Formula este cunoscută, din metoda combinatorică "stars and bars",[6] sau ca numărare de "weak compositions".[7]

Vom ignora pentru moment condiţia de necoliniaritate. Condiţia ca trei puncte din $W \subset X$ să nu se afle într-un plan paralel cu una din feţe revine la $|\{x \in W \mid x_k = c\}| \leq 2$ pentru fiecare $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ şi $c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Dar atunci, pentru $|W| = 2n$,

$$6 \cdot 2n = \sum_{x \in W} \sum_{k=1}^{4} x_k = \sum_{k=1}^{4} \sum_{x \in W} x_k \geq 4 \sum_{i=0}^{n-1} 2i = 4n(n-1),$$

de unde $|W| = 2n \leq 8$, iar pentru $|W| = 2n+1$,

$$6(2n+1) = \sum_{x \in W} \sum_{k=1}^{4} x_k = \sum_{k=1}^{4} \sum_{x \in W} x_k \geq 4 \left(\sum_{i=0}^{n-1} 2i + n \right) = 4n^2,$$

de unde $|W| = 2n+1 \leq 7$. Cardinalitatea maximă posibilă pentru W este aşadar 8, cu egalitate în respectiva inegalitate. Un astfel de model W trebuie să conţină câte două valori 0, 1, 2 şi 3 pe fiecare dintre coordonate (deci câte două puncte pe fiecare faţă, ceea ce garantează şi că trei câte trei sunt necoliniare), şi se poate lua o mulţime W formată din

$(0,1,2,3), (0,3,2,1), (1,2,3,0), (1,0,3,2), (2,3,0,1), (2,1,0,3), (3,0,1,2), (3,2,1,0)$,

provenită din liniile şi coloanele matricei circulante $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

Soluţia oficială disperă în a explica precis mersul raţionamentelor, şi de fapt ignoră complet condiţia de necoliniaritate. Problema este clar mult prea dificilă pentru o probă "de clasă", fie ea la etapa naţională – vezi punctajele tragic de mici; ar fi fost mai potrivită poate într-un test de selecţie. Iar ideea a mai fost folosită,[8] (ceea ce îmi permite chiar să fac o încercare educată de a ghici propunătorul iniţial – nu sunt eu!). □

[6] http://en.wikipedia.org/wiki/Stars_and_bars_(combinatorics)

[7] http://en.wikipedia.org/wiki/Composition_(combinatorics)

[8] În dimensiune 2, drept caz particular, dar într-o prezentare mai generală, problema 4 de la concursul Şcoala cu Ceas 2010.

5. ÎNCHEIERE

În spiritul – de acuma obişnuit – al superficialităţii invazive şi pervazive în mai toate domeniile societăţii, deci şi Societăţii de Ştiinţe Matematice din România, comunicatul de presă[9] prealabil produs conţine următoarele perle

- ... celei de **a 66 - a Olimpiadă Naţională** ..., în loc de ... celei de **a 66 - a Olimpiade Naţionale** ...;
- Gazeta Matematică care; o cacofonie uşor de evitat ...;
- joi, 10 aprilie; evident, joi este 9 aprilie;
- ... Universităţii de Politehnică, în loc de ... Universităţii Politehnice.

Un amănunt hazliu este că acest comunicat de presă anunţă desfăşurarea concursului pentru toate clasele, de la a V-a la a XII-a, la Liceul Tehnologic de Metrologie "Traian Vuia". Când un cititor remarcă pe Facebook SSMR că de fapt clasele a V-a şi a VI-a susţin proba la Liceul Teologic Adventist "Ştefan Demetrescu", i se răspunde că "pe hartă, vorbim de 2 clădiri vecine"; desigur, dar totuşi instituţii diferite – dar nu dădea bine referinţa la un liceu teologic ?!? De obicei, liceele cele mai de vază din oraşul unde se petrece olimpiada "se bat" pentru a o găzdui; m-aş fi aşteptat să asist la o concurenţă acerbă între liceele Gheorghe Lazăr, Mihai Viteazul, sau Sfântul Sava ... dar olimpiada a fost relegată la periferia Bucurescilor.

În fine, o mică (mare) inexactitate. În comunicat se specifică Prima ediţie a avut loc la începutul secolului al douăzecilea .... Dar într-o notă istorică[10] semnată de Mircea Trifu, citim

> După 1949, concursurile Gazetei Matematice au fost sistate. Apar olimpiadele de matematică ale elevilor, structurate pe etape (locală, judeţeană, naţională). La început a existat şi Olimpiada micilor matematicieni pentru elevii claselor V-VII (VIII), dar mai apoi, la clasele V-VI s-a desfiinţat etapa republicană.

Nu sunt un mare specialist în istoria olimpiadei, dar are sens – dacă prima ediţie a fost în anul 1950 (care numai "începutul secolului XX" nu este), atunci ediţia a 66-a cade exact în 2015.

Şi dacă tot vorbim de site-ul Societăţii de Ştiinţe Matematice din România (SSMR),[11] o întâmplare a făcut să utilizez link-ul oferit (la "Legături utile", pe latura dreaptă a paginii) pentru **MASSEE**; distraţi-vă să daţi un click! În plus, mi se pare doar mie, sau un cuplu de comentarii mai negative (cu privire la organizare) au dispărut / au fost ascunse / pe contul Facebook al SSMR?[12] Dacă da, este o practică considerată a fi reprobabilă ...

---

[9] `http://ssmr.ro/comunicate_presa/ONM_2015`

[10] `http://www.gazetamatematica.net/?q=node/26`

[11] `http://rms.unibuc.ro/`

[12] Nu mă pricep prea mult la felul cum funcţionează Facebook, dar când site-ul anunţă $\boxed{\text{Vezi încă 3 comentarii}}$ şi după click apar doar încă două, poate că exact asta înseamnă, că unul a fost ascuns?

Menţinerea site-ului Olimpiadei Naţionale a fost însă aproape ireproşabilă. Enunţurile şi soluţiile, rezultatele, şi celelalte informaţii, toate au apărut în timp util; listele au fost frumos formatate şi uşor de consultat – din toate punctele de vedere, o mare îmbunătăţire faţă de anii trecuţi.

Această etapă naţională a fost cam ciudată. Au apărut – în fine – câteva (puţine) probleme de combinatorică; una în particular însă disproporţionat de dincolo de nivelul normal (problema 4, clasa a VIII-a; vezi comentariul meu detaliat). Problema 1, clasa a VIII-a, putea profita de un mic ajutor printr-un punct suplimentar preliminar; aceste două probleme de la clasa a VIII-a au transformat proba într-un coşmar pentru concurenţi, utilizarea lor fiind de nejustificat. Se continuă ignorarea faptului că divizorii şi numerele prime trebuie specificate pozitive, fără a lăsa să se subînţeleagă acest lucru. Uneori s-a cerut prea puţin din ce se putea spune, alteori s-a dat o informaţie superfluă. Unele probleme puteau fi soluţionate prin enumerarea mecanică a cazurilor, în loc de un veritabil raţionament matematic. Una peste alta, un concurs neomogen, cântărit în grabă, cu o vădită lipsă de viziune generală.

Iar trecerea în continuare sub tăcere a numelor autorilor este neplăcută şi frustrantă. Eu, cel puţin, sunt curios să le aflu, din motive uşor de înţeles!

În fine, decizia la care făceam aluzie în comentariul final al clasei a VI-a. Printr-o altă judecată solomonică, ocupanţilor locurilor de vârf de la clasa a VI-a li s-a "permis" să participe – *hors concours* – la testul de selecţie Juniori, cu specificarea **expresă** că, indiferent de rezultate, acestea nu vor fi luate în consideraţie. "Regulamentele", cu multe paragrafe scrise în grabă şi aproape inaplicabile în lipsa lor de luciditate (nu mă provocaţi! aş putea spune multe alte lucruri aspre), sunt aplicate cu religiozitate şi anchilozare, în detrimentul unei poziţii flexibile şi în spiritul, nu în litera, promovării şi încurajării talentelor.

O altă decizie de ultimă oră a fost modificarea formulei de *carry-over* a punctajelor de la clasă, la $10(1 - D/P)$ (cu 10 înlocuind 20), unde D este diferenţa de punctaj faţă de primul clasat, iar P este punctajul primului clasat. Cel mai bine este evident $0(1 - D/P) = 0$, întreaga idee de *carry-over* fiind o decizie individuală şi arbitrară.