ViitoriOlimpici.ro

Problema 3
Etapa 1
Clasa a IX-a

Problema 3. Determinaţi numărul tripletelor de numere naturale (a, b, c) care verifică simultan condiţiile:

i) $a < b < c$;

ii) $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 2023$.

***

Soluţie. Vom demonstra mai întâi că numerele a, b, c care verifică condiţiile din enunţ sunt pătrate perfecte.

Dacă, prin absurd, a nu este pătrat perfect, atunci $\sqrt{a} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Ridicând la pătrat relaţia $\sqrt{b} + \sqrt{c} = 2023 - \sqrt{a}$, obţinem $\sqrt{bc} = r - 2023\sqrt{a}$, unde $r = \dfrac{2023^2 + a - b - c}{2}$. Evident $r \in \mathbb{Q}$ şi $r \neq 0$. După o nouă ridicare la pătrat, obţinem $\sqrt{a} = \dfrac{r^2 + 2023^2 a - bc}{2r \cdot 2023}$, de unde $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$, absurd. Urmează că a este pătrat perfect. Analog se arată că b şi c sunt pătrate perfecte.

Fie $a = x^2$, $b = y^2$ şi $c = z^2$, unde $x, y, z \in \mathbb{N}$. Condiţiile din ipoteză devin: $1°)$ $x < y < z$ şi $2°)$ $x + y + z = 2023$.

Deoarece $673 + 674 + 675 = 2022$, rezultă că cea mai mare valoare pe care o poate lua x este 673. Fie $k \in \{0, 1, 2, \dots, 673\}$. Dacă $x = k$, atunci $y + z = 2023 - k$. Cum $k < y < z$, deducem că y poate lua următoarele valori:

- pentru $k =$ par, $y \in \left\{k+1, k+2, \dots, \left[\dfrac{2023-k}{2}\right]\right\}$; de aici rezultă că numărul k poate lua $\left[\dfrac{2023-k}{2}\right] - k = 1011 - \dfrac{3k}{2}$ valori.
- pentru $k =$ impar, $y \in \left\{k+1, k+2, \dots, \left[\dfrac{2023-k}{2}\right] - 1\right\}$; rezultă că numărul k poate lua $\left[\dfrac{2023-k}{2}\right] - k - 1 = 1011 - \dfrac{3k}{2} - \dfrac{1}{2}$ valori.

În fiecare situaţie numărul z este unic determinat de relaţia $z = 2023 - x - y$.

Ţinând cont că în mulţimea $\{0, 1, 2, \dots, 673\}$ sunt 337 numere impare, deducem că numărul cerut este

$$\sum_{k=0}^{673}\left(1011 - \frac{3k}{2}\right) - 337 \cdot \frac{1}{2} = 674 \cdot 1011 - \frac{1}{2} \cdot \left(3 \cdot \frac{673 \cdot 674}{2} + 337\right)$$

$$= 674 \cdot \left(1011 - \frac{3 \cdot 673 + 1}{4}\right) = 341044.$$