Comentarii Adiţionale la Probleme Selectate
IMO şi Tuymaada 2014

Abstract. Comments on selected problems presented at the 2014 IMO and Tuymaada competitions.

Data: 18 iulie 2014.
Autor: Dan Schwarz, Bucureşti.

0. Introducere

Acest material continuă prezentările precedente asupra celei de a 55-a IMO (Olimpiada Internaţională de Matematică), Cape Town – Africa de Sud, 3–13 iulie 2014, şi a XXI-a Olimpiadă de Matematică Tuymaada, Yakutsk – Republica Sakha (Yakuţia), 5–11 iulie 2014.[1]

Scopul principal este de a prezenta idei suplimentare şi soluţii alternative, ieşite la iveală posterior postării materialelor complete de mai devreme.

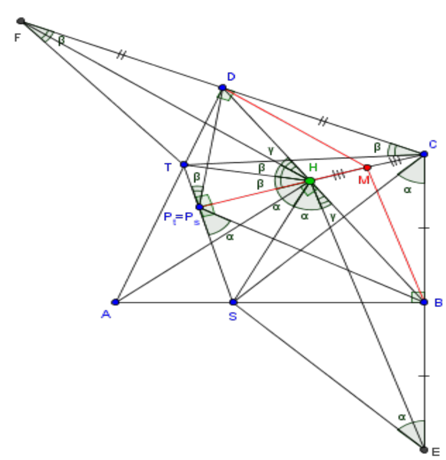
1. Problema 3 IMO

Problemă. *Patrulaterul convex $ABCD$ este cu $\angle ABC = \angle CDA = 90°$. Punctul H este piciorul perpendicularei din A pe BD. Punctele S şi T se află pe laturile (AB), respectiv (AD), astfel încât H se află în interiorul triunghiului SCT şi*

$$\angle CHS - \angle CSB = 90°,\ \angle THC - \angle DTC = 90°.$$

Demonstraţi că dreapta BD este tangentă la cercul circumscris $\triangle TSH$.

Iran



Mulţumirile mele sincere celor cu care am dialogat cu privire la problemele propuse, sau ale căror soluţii le-am împrumutat – lucruri care au condus la materialul de faţă.

[1] Soluţiile oficiale la problemele IMO 2014 se pare că apar pe site-ul sârbesc IMOMATH, la `http://www.imomath.com/index.php?options=924&lmm=0`.

Soluţie. (AoPS)

LEMMA. (On Three Perpendiculars) Let K, I, J, L, N be five points such that $KI \perp IN$, $KJ \perp JN$, $KL \perp IJ$.
Then the midpoint of LN is equidistant from the points I and J.

Proof. Let $\vec{x} = \overrightarrow{KI}$, $\vec{y} = \overrightarrow{KJ}$, $\vec{z} = \overrightarrow{KN}$, $\vec{t} = \overrightarrow{KL}$. We have $\vec{x} \cdot (\vec{z} - \vec{x}) = 0$, $\vec{y} \cdot (\vec{z} - \vec{y}) = 0$ and $\vec{t} \cdot (\vec{y} - \vec{x}) = 0$.

Therefore we can compute $\left(\dfrac{\vec{z}+\vec{t}}{2} - \vec{x}\right)^2 - \left(\dfrac{\vec{z}+\vec{t}}{2} - \vec{y}\right)^2$ to be $(\vec{x}^{\,2} - \vec{x} \cdot (\vec{z}+\vec{t}\,)) - (\vec{y}^{\,2} - \vec{y} \cdot (\vec{z}+\vec{t}\,)) = -\vec{x} \cdot \vec{t} + \vec{y} \cdot \vec{t} = \vec{t} \cdot (\vec{y} - \vec{x}) = 0.$ □

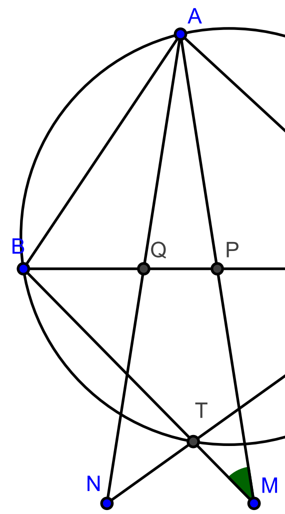
Let now M be the midpoint of CH, E and F be the reflections of C across B and D respectively, P_s and P_t be the projections of S and T respectively onto the line CH. Let also $\alpha = \angle SCB$, $\beta = \angle TCD$. Then $\angle SEB = \alpha$, $\angle CSB = 90^\circ - \alpha$, $\angle CHS = 180^\circ - \alpha$. Therefore $CHSE$ is cyclic and $\angle SHE = \angle SHP_s = \alpha$. Also notice that $\angle SP_sB = \alpha$, since $CBSP_s$ is cyclic. Thus $\angle BP_sH = 90^\circ - \alpha$, $HS \perp P_sB$, and we can apply the LEMMA for the pentad $\{S, B, P_s, H, C\}$ in lieu of $\{K, I, J, L, N\}$, to get $MB = MP_s$. Similarly $\angle FHT = \angle THP_t = \angle TP_tD = \beta$, $TH \perp P_tD$, and we can apply the LEMMA one more time, for the pentad $\{T, D, P_t, H, C\}$, so as to get $MD = MP_t$. Applying the LEMMA a third time, for the pentad $\{A, B, D, H, C\}$, we get $MB = MD$. Combining the results, we conclude that $MP_s = MP_t$. It means that P_s and P_t are actually the same point P. Therefore $\angle TPS = \angle TPH + \angle HPS = 180^\circ$ and TPS is a straight line. Next, let $\gamma = \angle EHB$. Since $FH = 2DM = 2MB = HE$, the triangle FHE is isosceles. Since $FE \parallel DB$, it follows $\angle DHF = \angle HFE = \angle HEF = \angle EHB = \gamma$. We see three pairs of equal angles dividing the straight angle DHB, therefore $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$. Finally, $\angle TSH = \angle PSH = 90^\circ - \alpha = \beta + \gamma = \angle THD$, which is a known condition for a tangent to a circle. □

2. PROBLEMA 4 IMO

Problemă. *Punctele P şi Q se află pe latura (BC) a triunghiului ABC ascuţitunghic, astfel încât $\angle PAB = \angle BCA$ şi $\angle CAQ = \angle ABC$. Punctele M şi N se află pe dreptele AP, respectiv AQ, astfel încât P este mijlocul lui (AM) şi Q este mijlocul lui (AN). Demonstraţi că dreptele BM şi CN se intersectează pe cercul circumscris triunghiului ABC.*

GEORGIA – Giorgi Arabidze

Soluţie (probabil) Oficială. Let us denote by R the intersection of BM and CN. Let X be the point symmetric to B with respect to P. Then $AX \parallel BM$ hence $\angle BMP = \angle XAP$. Since $\angle BAP = \angle ACQ$ and $\angle APB = \angle AQC = \angle BAC$, we conclude that $\triangle BAP \sim \triangle ACQ$. Therefore $\triangle PAX \sim \triangle QCN$, hence $\angle QCN = \angle PAX = \angle BMP$. This means that R, M, C, and P belong to a circle, which implies that $\angle MRC = \angle MPC = \angle BAC$. Thus R belongs to the circumcircle of $\triangle ABC$. □



Soluţie Alternativă. (Laurenţiu Ploscaru) Fie T punctul de intersecţie a dreptelor BM şi CN. Din considerente de unghiuri reiese asemănarea $\triangle PBA \sim \triangle ABC \sim \triangle QAC$, prin urmare $\dfrac{AQ}{BP} = \dfrac{CQ}{AP}$. Dar $AP = PM$ şi $AQ = QN$, de unde rezultă că $\dfrac{NQ}{BP} = \dfrac{CQ}{MP}$, iar cum $\angle CQN = \angle BPM = 180^\circ - \angle A$, obţinem că $\triangle CQN \sim \triangle BPM$.

De aici $\angle PCT = \angle PMT$, aşadar patrulaterul $PCMT$ este inscriptibil, deci $\angle CTM = \angle CPM = \angle A$, ceea ce înseamnă că patrulaterul $ABTC$ este inscriptibil. $\square$

3. Problema 5 IMO

Problemă. *Banca "Cape Town" emite monede cu valoarea* $\dfrac{1}{n}$*, oricare ar fi numărul întreg strict pozitiv* n*. Dându-se o colecţie finită de astfel de monede (nu neapărat de valori diferite), având valoare totală cel mult* $99+\dfrac{1}{2}$*, demonstraţi că este posibil să împărţim această colecţie în cel mult* 100 *de grupe, astfel încât fiecare grupă să aibă valoarea totală cel mult* 1*.*

LUXEMBURG – Gerhard Woeginger

Soluţie Alternativă. (bazată pe o idee a lui Paul Muscă) Fie $\mathcal{C}$ o astfel de colecţie finită de monede, fiecare monedă $C \in \mathcal{C}$ având ca valoare o fracţie egipteană $\dfrac{1}{n(C)}$, astfel încât $\displaystyle\sum_{C\in\mathcal{C}} \frac{1}{n(C)} \leq N + \frac{1}{2}$ pentru un $N \in \mathbb{N}^*$ fixat. Voi demonstra că $\mathcal{C}$ poate fi partiţionată în $\pi(\mathcal{C}) = N + 1$ grupe, având proprietatea că valoarea totală a monedelor din fiecare este cel mult 1.

1. Voi descrie pentru început un algoritm, numit *de optimizare*.

- Dacă există $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ astfel încât $\displaystyle\sum_{C\in\mathcal{D}} \frac{1}{n(C)} = \frac{1}{m}$ pentru un $m \in \mathbb{N}^*$, atunci putem reduce la $\alpha(\mathcal{C}) = (\mathcal{C} \setminus \mathcal{D}) \cup \{X\}$, unde $n(X) = m$, din moment ce trebuie să demonstrăm proprietatea cerută **şi** pentru colecţia $\alpha(\mathcal{C})$, iar aceasta evident o implică şi pentru $\mathcal{C}$, căci $\pi(\mathcal{C}) \leq \pi(\alpha(\mathcal{C}))$.

• Dacă $\mathcal{U} = \{C \in \mathcal{C} \mid n(C) = 1\} \neq \emptyset$, atunci putem reduce la $\beta(\mathcal{C}) = \mathcal{C} \setminus \mathcal{U}$, din moment ce trebuie să demonstrăm proprietatea cerută **şi** pentru colecţia $\beta(\mathcal{C})$, iar aceasta evident o implică şi pentru $\mathcal{C}$, căci $\pi(\mathcal{C}) = \pi(\beta(\mathcal{C})) + |\mathcal{U}|$.

Prin aplicarea iterată a operatorilor α şi/sau β, într-un număr finit de paşi reducem la o colecţie optimizată, fără astfel de relaţii. Presupunem în continuare colecţia $\mathcal{C}$ a fi optimizată.

2. Considerăm mulţimea $\mathcal{P} = \{n(C) \mid C \in \mathcal{C}, n(C) \leq 2N + 2\}$, (parţial) ordonată prin relaţia de divizibilitate. Teorema lui Dilworth afirmă că numărul minim de lanţuri dintr-o partiţie în lanţuri (acoperire) a lui $\mathcal{P}$ este egal cu talia maximă a unui antilanţ $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$.

3. Un faimos (şi uşor de demonstrat) rezultat al lui Erdös este că talia maximă a unui antilanţ $\mathcal{A}$ conţinut în $\{1, 2, \ldots, 2N+2\}$ este $N+1$. Fie deci o acoperire cu (cel mult) $N + 1$ lanţuri a lui $\mathcal{P}$. Pentru fiecare lanţ $\mathcal{L}$ din ea putem considera mulţimea $\mathcal{D} = \{C \in \mathcal{C} \mid n(C) \in \mathcal{L}\}$, căreia îi putem aplica Lema de mai jos, şi transforma într-o grupă; se obţin astfel (cel mult) $N+1$ grupe, cu valoare totală a monedelor din fiecare mai mică decât 1.

Lemă. *Fie $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$, cu proprietatea că dacă ordonăm valorile $n(C)$ pentru $C \in \mathcal{D}$ în ordine crescătoare $n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_d$, atunci $n_1 \mid n_2 \mid \cdots \mid n_d$. Atunci* $\displaystyle\sum_{C \in \mathcal{D}} \frac{1}{n(C)} = \sum_{i=1}^{d} \frac{1}{n_i} < 1.$

Demonstraţie. Evident $\dfrac{1}{n_1} < 1$. Fie $1 \leq m \leq d$ cel mai mare indice pentru care $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{n_i} = \frac{n}{n_m} < 1$. Dacă $m = d$, gata; dacă nu, avem $n \leq n_m - 1$, care împreună cu $n_m \mid n_{m+1}$ (deci $n_m \leq n_{m+1}$), duce la

$$\sum_{i=1}^{m+1} \frac{1}{n_i} = \frac{n}{n_m} + \frac{1}{n_{m+1}} \leq \frac{n+1}{n_m} \leq 1,$$

şi cum nu putem avea egalitate cu 1, contrazicem maximalitatea lui m. □

3. Fie atunci $\mathcal{C}_1 = \{C \in \mathcal{C} \mid n(C) \leq 2N + 2\}$; toate elementele lui $\mathcal{C}_1$ au fost cuprinse în aceste grupe. Pentru orice $C \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_1$, deci cu $n(C) > 2N+2$, putem găsi o grupă cu valoarea totală a monedelor cel mult $1 - \dfrac{1}{2N+3}$ şi deci adăuga moneda C la acea grupă. Într-adevăr, dacă $N + 1$ grupe conţin monede, şi dacă fiecare grupă are valoarea totală mai mare decât $1 - \dfrac{1}{2N+3}$, atunci suma valorilor monedelor tuturor acestor grupe este mai mare decât $(N + 1)\left(1 - \dfrac{1}{2N+3}\right) = N + \dfrac{N+2}{2N+3} > N + \dfrac{1}{2}$, imposibil.[2] □

[2]Aceasta este chiar marginea îmbunătăţită a lui Evan Chen din prezentarea precedentă. Mai mult, problema rămâne adevărată pentru colecţii **infinite**.

4. Problema 6 IMO

Problemă. *Spunem că o mulţime de drepte din plan se află* ***în poziţie generală*** *dacă ea nu conţine nicio pereche de drepte paralele şi niciun triplet de drepte concurente. O mulţime $\mathcal{D}$ de drepte în poziţie generală împarte planul în regiuni, unele având arie finită; le vom numi pe acestea* ***regiunile finite ale lui*** $\mathcal{D}$. *Demonstraţi că, pentru orice n suficient de mare, în orice mulţime de n drepte în poziţie generală putem colora cel puţin $\sqrt{n}$ dintre drepte cu albastru, astfel încât niciuna dintre regiunile sale finite să nu aibă frontiera în întregime albastră.*

Notă*: Rezultate în care $\sqrt{n}$ este înlocuit cu $c\sqrt{n}$ pot primi puncte, funcţie de valoarea constantei c.*

Austria / S.U.A. – Gerhard Woeginger / Po-Shen Loh

Precizări. În prezentarea mea precedentă trimiteam la
`http://www2.math.technion.ac.il/ room/ps_files/coloringlines.pdf`,
citând şi `http://arxiv.org/pdf/1205.5162v2.pdf`. I quote

Theorem 1. The lines of every (simple) arrangement of n lines in the plane can be coloured with $O(\sqrt{n/\log n})$ colours so that no face of the arrangement is monochromatic.

Aplicarea la problema noastră se face astfel. Înseamnă atunci că există o constantă $M > 0$, şi N astfel încât pentru $n \geq N$ putem colora cu **cel mult** $M\sqrt{n/\log n}$ culori. Deoarece avem de-a face cu n drepte, înseamnă că există o culoare folosită pentru **cel puţin** $\dfrac{n}{M\sqrt{n/\log n}} = \dfrac{1}{M}\sqrt{n \log n}$ drepte. Folosim această culoare drept **albastru**, şi "uităm" celelalte culori. Atunci nicio regiune nu are frontiera în întregime albastră (căci nicio regiune nu era monocromatică înainte de a uita celelalte culori). Acum, pentru n suficient de mare, $\dfrac{1}{M}\sqrt{\log n}$ poate fi făcut constant c oricât de mare dorim, deci putem colora în albastru cel puţin $c\sqrt{n}$ drepte, ceea ce ucide problema, aşa cum a fost ea enunţată.

Soluţie (probabil) Oficială. Given a configuration of n lines, denote by x the maximal number of lines that can be colored in blue so that the conditions of the problem are satisfied, and denote by $\mathcal{C}$ one such coloring. Let $\mathcal{N}$ be the set of lines that are non-blue in the coloring $\mathcal{C}$. Each intersection point of two blue lines will be called *blue point*. Each region in this coloring with exactly one non-blue edge will be called *blue region*. Let β be the total number of blue regions.

For each and every blue region $B_1B_2\dots B_k$ consider the internal angles which correspond to its blue vertices, and assign a label of value $\dfrac{1}{k-2}$ to each of these angles. All other angles are assigned labels of value 0.

The sum of the values of angles in each blue region is 1, implying that the sum of all labels of all angles in the coloring $\mathcal{C}$ is equal to β.

For each blue point B we calculate the sum of all labeled angles whose vertex is B. If the sum of the labels is lesser than 2, we call such a point a *good point*. Otherwise, the point will be called *bad*.

Lemma. Assume that X is a bad point. Then all four angles around X belong to blue regions. Exactly one of these blue regions is a triangle (we will denote it by $T(X)$) and at most two are quadrilaterals. The non-blue line that contains the edge of $T(X)$ also contains the edge of two other blue regions whose vertex is X.

Proof. If none of the regions is a triangle, then all four of the angles have value of at most $\frac{1}{2}$, hence their sum cannot be larger than 2.

Assume that PQX is a blue triangle with vertex X. Let ℓ be the non-blue line that contains P and Q. Denote by $\mathcal{P}$ and $\mathcal{Q}$ the regions different from $\triangle PQX$ whose edges are XP and XQ. Let us denote by $\mathcal{Y}$ the fourth region with vertex X. The regions $\mathcal{P}$ and $\mathcal{Q}$ cannot be triangles, because no other line passes through X. Assume that $\mathcal{Y}$ is a blue triangle. Assume Q' and P' are vertices of this triangle that belong to lines XP and XQ. Since the segments XP and XQ' cannot be intersected by any of the other lines, we conclude that $\mathcal{P}$ is not blue. Similarly, $\mathcal{Q}$ is not blue, and the sum of labels of angles with vertex X is exactly 2, contradicting the assumption that X is bad. Therefore, $\triangle XPQ$ is the only blue triangle with vertex X. Consequently, each region that has vertex X must be a blue region (otherwise X would not be bad).

Let ℓ' be the non-blue line that contains the edge of $\mathcal{Y}$ and let us denote by U and V the intersections of ℓ' with the lines XP and XQ. Since $\mathcal{Q}$ is blue, the segment XU is intersected by a blue line. Similarly, the segment XV is intersected by another blue line, and $\mathcal{Y}$ cannot be a quadrilateral. $\square$

A consequence of the previous Lemma is that the sum of all labels of angles with vertex at any blue point is at most $\frac{7}{3}$. Let b be the number of bad points and g the number of good points. Then we have $\beta \le 2g + \frac{7}{3}b$.

For $\ell \in \mathcal{N}$ denote by $\beta(\ell)$ the number of blue regions with an edge on ℓ and by $\mathcal{P}_\ell$ the set of bad points that are vertices of blue triangles with edges on ℓ. Fix a line ℓ for which $\mathcal{P}_\ell = \{X_1, \dots, X_m\} \neq \emptyset$. Assume that P_1, Q_1, $P_2, Q_2, \dots, P_m, Q_m$ are points on ℓ in that order such that $T(X_i) = \triangle X_i P_i Q_i$ for each $1 \le i \le m$. According to the Lemma we know that for each i there exist two non-triangular blue regions $\mathcal{P}_i$ and $\mathcal{Q}_i$ whose one edge is on ℓ such that X_iP_i is an edge of $\mathcal{P}_i$ and X_iQ_i is an edge of $\mathcal{Q}_i$. Since all $\mathcal{P}_i$ are distinct we conclude that $\beta(\ell) \ge 2m$. Let us denote $\mathcal{B} = \{\ell \in \mathcal{N} \mid \mathcal{P}_\ell \neq \emptyset\}$. Therefore

$$\beta = \sum_{\ell \in \mathcal{N}} \beta(\ell) = \sum_{\ell \in \mathcal{B}} \beta(\ell) + \sum_{\ell \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{B}} \beta(\ell) \ge \sum_{\ell \in \mathcal{B}} 2|\mathcal{P}_\ell| + |\mathcal{N} \setminus \mathcal{B}| \ge$$

$$\ge \sum_{\ell \in \mathcal{B}} (|\mathcal{P}_\ell| + 1) + |\mathcal{N} \setminus \mathcal{B}| = \sum_{\ell \in \mathcal{B}} |\mathcal{P}_\ell| + |\mathcal{B}| + |\mathcal{N} \setminus \mathcal{B}| = b + n - x.$$

We now obtain $b + n - x \leq 2g + \frac{7}{3}b$, which implies the inequality

$$n - x \leq 2g + \frac{4}{3}b \leq 2(g+b) = 2\binom{x}{2}.$$

The consequence of the last relation is $x \geq \sqrt{n}$. $\square$

O soluţie mult mai simplă, bazată pe metoda asocierii de "ponderi", poate fi compusă din alte contribuţii de pe AoPS; consider că merită a fi prezentată şi analizată în detaliu!

Soluţie Alternativă. Suppose we can color a maximum of k out of the n lines in blue. That means that coloring any other of the $n-k$ lines in blue creates a blue (finite) region. Hence such a line is forbidden, since some region will exist, containing all blue lines on boundary, except that one. Thus each of these $n-k$ lines is a boundary line for **at least** one region whose all other sides are blue. Now for each of these $n-k$ lines we fix and associate **exactly** one such region, called *L-region*.

Consider the $\binom{k}{2}$ intersection points of the blue lines (call them *B-points*) and the four regions each belongs to; out of these regions, only the L-regions will matter.

We will assign a value to each B-point; for each L-region containing it, we will add a weight of $\frac{1}{r}$ to it, where r is the number of B-points on the boundary of that region. For each non-blue line, a weight of 1 will thus be distributed among the values assigned to the B-points (those on the boundary of the L-region associated to the non-blue line).

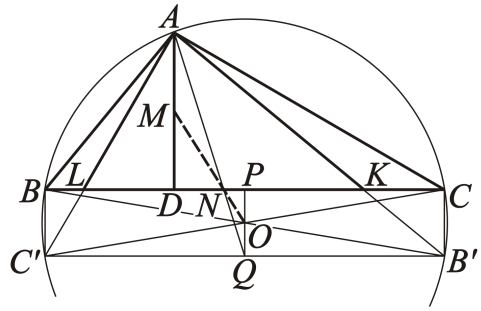
Let us prove the value assigned to a B-point is at most 2. Suppose it isn't true; then at least one of the four regions it belongs to is an L-region, and contributes a value (strictly) larger than $\frac{1}{2}$, thus equal to 1, therefore it is a triangle, having its third side part of a non-blue line. But then its neighbouring regions will not be L-regions (since they are associated with the same non-blue line), and only the fourth region might be an L-region, thus contributing at most 1 to the value. So then the total value of that B-point will have a maximum of $1+0+0+1=2$ in that case, absurd.

So each value assigned to a B-intersection point is at most 2, the total value will thus be at most $2\binom{k}{2}$. Hence, as there are $n-k$ non-blue lines, it follows $n-k \leq 2\binom{k}{2}$, therefore $k \geq \sqrt{n}$, as wanted. $\square$

5. Problema 3 Juniori / 2 Seniori Tuymaada

Problemă. *Punctele K şi L se află pe latura BC a triunghiului ABC, astfel încât $\angle BAK = \angle CAL = 90^\circ$. Demonstraţi că mijlocul înălţimii din A, mijlocul lui KL şi centrul cercului circumscris $\triangle ABC$ sunt coliniare.*

A. Akopyan, S. Boev, P. Kozhevnikov



Soluţie Alternativă. (Ionuţ Onişor) În figura de mai sus (tot curtoazie a autorului), AD este înălţimea din A (M fiind mijlocul său), punctele B' şi C' sunt diametralele opuse punctelor B, respectiv C (O fiind centrul cercului circumscris $\triangle ABC$), iar ANQ este mediană, atât a triunghiului KAL, cât şi a triunghiului $B'AC'$. PQ este perpendiculara prin O la BC, prin urmare triunghiurile ADN şi QPN sunt asemenea, de unde rezultă că punctele M, N, O sunt coliniare. □

Remarcă. Această soluţie elimină complet orice calcule (în soluţia oficială este demonstrată o Lemă metrică destul de generală, apoi este verificată prin calcul îndeplinirea ei în condiţiile problemei. Mi se confirmă că este şi soluţia dată – în concurs – de Andrei Ilie; restul soluţiilor (când date) au fost calculatorii.

6. Problema 7 Juniori / 6 Seniori Tuymaada

Problemă. *Fiind date n pătrate negre şi n pătrate albe în plan, fiecare poate fi obţinut din oricare altul printr-o translaţie. Oricare două pătrate de culori diferite au un punct comun. Demonstraţi că există un punct comun la cel puţin n pătrate.*

V. Dolnikov

Soluţie Alternativă. (AoPS)

Lemă. *Dacă un număr finit de pătrate pot fi obţinute unul din altul prin translaţii, şi dacă oricare două au un punct în comun, atunci toate au un punct în comun.*

Demonstraţie. Considerăm un sistem de coordonate cu axele paralele cu laturile pătratelor. Proiecţiile pe fiecare din axe se intersectează două câte două, deci (din teorema lui Helly în dimensiune 1) au câte un punct în comun. Perpendicularele în aceste puncte se vor intersecta într-un punct comun tuturor pătratelor.[3] □

Distingem acum două cazuri.

• Cazul 1. Toate perechile de pătrate negre se intersectează, sau toate perechile de pătrate albe se intersectează. Aplicând Lema obţinem direct rezultatul cerut.

[3]Rezultatul rămâne adevărat pentru orice colecţie de dreptunghiuri în plan, cu laturile paralele cu două direcţii ortogonale fixate [H. Hadwiger & H. Debrunner, *Combinatorial Geometry in the Plane*], **15**.

• Cazul 2. Există două pătrate negre care nu se intersectează, şi de asemenea două pătrate albe care nu se intersectează. Putem presupune pătratele a fi de latură 1. Pentru un pătrat p negru (alb), considerăm un pătrat P de latură 3 astfel încât p să fie pătratul său unitate central. Toate pătratele unitate albe (negre) sunt atunci conţinute în P. Dacă două pătrate p_1, p_2 negre (albe) nu se intersectează, pătratele albe (negre) sunt conţinute în intersecţia $P_1 \cap P_2$, care este un dreptunghi cu una din laturi cel mult 3 şi cealaltă cel mult 2. Acum, pentru fiecare dreptunghi cu această proprietate, putem alege două puncte în el, astfel încât fiecare pătrat unitate (cu laturile paralele cu direcţiile date) conţinut în dreptunghi să conţină cel puţin unul din aceste puncte. Dacă n este par, atunci cu siguranţă există cel puţin $n/2$ pătrate negre care se intersectează două câte două şi cel puţin $n/2$ pătrate albe care se intersectează două câte două, şi putem aplica din nou Lema. Cazul n impar se tratează la fel. $\square$

7. Încheiere

Cu aceasta se încheie comentariile mele asupra lucrurilor de interes din anul competiţional 2013/2014. Aş mai avea multe de spus, pe latura ”meta-matematică”, relativ la atmosfera apăsătoare şi în acelaşi timp impersonală din jurul acestor scurte interludii matematice; de răspuns la ”Ceea ce unii părtaşi ai generaţiei mele consideră că e invers şi că ei deţin adevărul absolut în matematică, filologie, gramatică şi în orice”, sau ”Sunt extrem de trist când **descoper** că idolii generaţiei mele îşi pierd prietenii. Oare de ce?”, sau chiar ”Mi-ar plăcea adevărata valoare. Şi frumuseţea frazei. A aceleia ce generaţia voastră, excelentă, v-a ales-o. Succes”. Dar nu vreau să devin **părtaş** la acest masacru.