FORME ALE BINOMULUI LUI NEWTON UTILE ÎN GIMNAZIU

ABSTRACT. Prezenta notă scoate în evidenţă câteva forme ale formulei binomului lui Newton, utile în gimnaziu şi câteva aplicaţii ale acestora, unele alese din problemele apărute în Gazeta matematică.

Nu vom da forma explicită a formulei binomului lui Newton. Ne vom mulţumi cu formele care ne sunt de ajutor în rezolvarea problemelor de divizibilitate şi nu numai.

Lecţia se adresează clasei a VIII-a

Data: martie 2011

Autor: Romanţa Ghiţă şi Ioan Ghiţă, Colegiu Naţional "Inochenţie Micu Clain", Blaj

Propoziţia 1 $(a+b)^n = M_a + b^n$, unde prin M_a se înţelege un multiplu al lui a.

Justificare Avem $(a+b)^n = (a+b)(a+b)...(a+b)$. Pentru a înmulţi cele n paranteze putem proceda astfel: înmulţim pe a din toate parantezele, deci un multiplu de a; înmulţim pe b dintr-o paranteză cu a din celelalte $n-1$ paranteze, din nou un multiplu de a; înmulţim pe b din două paranteze cu a din celelalte $n-2$ paranteze, obţinem tot un multiplu de a. Procedăm la fel în continuare şi înmulţim pe b din $n-1$ paranteze cu a dintr-o paranteză, deci tot un multiplu de a. La final înmulţim pe b din toate cele n paranteze. Acesta nu mai este multiplu de a. În concluzie avem o sumă de multiplii ai lui a şi un termen b^n. Aşadar afirmaţia din enunţ este justificată.

Consecinţe

$$(a-b)^n = M_a + (-b)^n$$
$$(a+b)^n = a^n + b^n + M_{a\cdot b}$$
$$n^m = (n-k+k)^m = M_{n-k} + k^m \text{ cu varianta } n^m - k^m = M_{n-k}$$
$$n^m = (n+k-k)^m = M_{n+k} + (-k)^m \text{ cu varianta, pentru } m \text{ număr impar, } n^m + k^m = M_{n+k}$$

Dăm în continuare câteva aplicaţii în a căror rezolvare folosim chestiunile prezentate.

Problema 1 Determinaţi $n \in \mathbb{Z} - \{1\}$ astfel încât $n^{2007} + 2$ să se dividă cu $n-1$. (GM 1/2008)

Soluţie: $n^{2007} + 2 = (n-1+1)^{2007} + 2 = M_{n-1} + 1^{2007} + 2 = M_{n-1} + 3$. Acesta se divide cu $n-1$ dacă şi numai dacă $n-1 \in D_3 = \{\pm 1; \pm 3\}$. Obţinem

$n \in \{-2; 0; 2; 4\}$.

Problema 2 Arătaţi că numărul $76^{63} + 66^{53}$ se divide cu 71.(GM 1/2008)

Soluţie:$76^{63}+66^{53} = (71+5)^{63}+(71-5)^{53} = M_{71}+5^{63}+M_{71}+(-5)^{53} = M_{71}+5^{63}-5^{53} = M_{71}+5^{53}(5^{10}-1)$. Acum $5^{10}-1 = 5^{4\cdot 2}\cdot 25-1 = 625^2\cdot 25-1 = (639-14)^2\cdot 25-1 = M_{71}+14^2\cdot 25-1 = M_{71}+4899 = M_{71}$. Revenind $76^{63}+66^{53} = M_{71}$.

Problema 3 Fie $A = 2^{3n+1}\cdot 3^n + 15\cdot 7^n$ şi $B = 2^{4n+2}\cdot 3^{2n+2} + 4\cdot 5^{2n+2}$, $n \in \mathbb{N}$. Să se arate că fracţia $\frac{A}{B}$ se simplifică prin 17. (GM 2/2008)

Soluţie: Trebuie să demonstrăm că A şi B sunt multiplii de 17.
$A = 2\cdot 24^n + 15\cdot 7^n = 2\cdot(17+7)^n + 15\cdot 7^n = 2\cdot(M_{17}+7^n) + 15\cdot 7^n = M_{17} + 2\cdot 7^n + 15\cdot 7^n = M_{17} + 17\cdot 7^n = M_{17}$.
$B = 4\cdot 16^n\cdot 9\cdot 9^n + 100\cdot 25^n = 36\cdot 144^n + 100\cdot 25^n = 36\cdot(136+8)^n + 100\cdot(17+8)^n = 36\cdot(M_{17}+8^n) + 100\cdot(M_{17}+8^n) = M_{17} + 36\cdot 8^n + 100\cdot 8^n = M_{17} + 136\cdot 8^n = M_{17}$.

Problema 4 Să se arate că oricare ar fi $x \in \mathbb{Z}$ numărul $x^8 + x + 1$ se divide cu $x^2 + x + 1$. (GM 11/2007, enunţ adaptat)

Soluţie: $x^8+x+1 = (x^2)^4+x+1 = [x^2+x+1-(x+1)]^4+x+1 = M_{x^2+x+1}+(x+1)^4+x+1 = M_{x^2+x+1}+(x^2+2x+1)^2+x+1 = M_{x^2+x+1} + [(x^2+x+1)+x]^2+x+1 = M_{x^2+x+1}+M_{x^2+x+1}+x^2+x+1 = M_{x^2+x+1}$.

O altă utilitate a formulelor prezentate la început este că puten deduce anumite forme pe care nu le au pătratele perfecte.

Exemplu Ridicând la pătrat numerele de forma $4t, 4t+1, 4t+2, 4t+3, t \in \mathbb{Z}$, se obţine: $(4t)^2 = M_4$, $(4t+1)^2 = M_4+1$, $(4t+2)^2 = M_4+2^2 = M_4$, $(4t)^2 = M_4$, $(4t+3)^2 = M_4+3^2 = M_4+9 = M_4+1$. De aici deducem:

Propoziţia 2 Nu există pătrate perfecte de forma $4t+2$ sau $4t+3$, $t \in \mathbb{Z}$.

Problema 5 Fie $A = (n+1)^{2008} - n^{2008}, n \in \mathbb{N}$. Arătaţi că numărul $A^2 + 4A + 2$ nu poate reprezenta aria unui pătrat având lungimea laturii exprimată printr-un număr natural. (GM 5-6/2008)

Soluţie: Pentru a reprezenta aria unui pătrat având lungimea laturii exprimată printr-un număr natural, A^2+4A+2 trebuie să fie pătrat perfect. Cum $n+1$ şi n au parităţi diferite este clar că A este impar, deci $A = 4k+1$ sau $A = 4k+3$.
Pentru $A = 4k+1$ avem $A^2+4A+2 = (4k+1)^2+4\cdot(4k+1)+2 = M_4+1^2+M_4+2 = M_4+3$, deci nu este pătrat perfect.

Pentru $A = 4k + 3$ avem $A^2 + 4A + 2 = (4k + 3)^2 + 4 \cdot (4k + 3) + 2 = M_4 + 3^2 + M_4 + 2 = M_4 + 3$, deci nu este pătrat perfect.

Cu aceasta problema este rezolvată.