Problema 2. Fie ecuaţia $x^{2y} = y^{3x}$, cu necunoscutele $x, y \in \mathbb{R}_+$.
a) Arătaţi că ecuaţia are cel puţin trei soluţii cu componentele naturale.
b) Rezolvaţi ecuaţia.

* * *

Soluţie. Evident, trebuie ca $x, y \in (0, \infty)$.
a) Perechile $(1, 1)$, $(8, 16)$ şi $(3, 9)$ sunt soluţii.
b) Logaritmând ecuaţia în baza 10, obţinem: $2y \lg x = 3x \lg y$. (1)
Fie $\frac{y}{x} = m \in (0, \infty)$. Înlocuim $y = mx$ în (1) şi obţinem:

$$2mx \lg x = 3x \lg mx \Leftrightarrow \lg x^{2m} = \lg \left(m^3 x^3\right) \Leftrightarrow x^{2m} = m^3 x^3. \quad (2)$$

Dacă $m = \frac{3}{2}$, atunci (2) $\Leftrightarrow m^3 = 1 \Leftrightarrow m = 1$, fals. Aşadar $m \neq \frac{3}{2}$, iar (2) $\Leftrightarrow x = m^{\frac{3}{2m-3}}$.

Obţinem soluţiile $(x, y) = \left(m^{\frac{3}{2m-3}}, m^{\frac{2m}{2m-3}}\right)$, cu $m > 0, m \neq \frac{3}{2}$.