Țînț Stefan Maximilian, Clasa a V-a, Colegiul Național de Informatică Tudor Vianu

Puteri. Pătrate perfecte. Cuburi perfecte

Definiții si proprietăți:

- Fie a și n 2 numere naturale, $n \geq 2$. Produsul a n factori egali cu a se numește puterea a n-a a numărului natural a și se notează a^n.

- Fie a, b, m, n numere naturale, cu $a, b \neq 0$. Atunci:

1) $a^m \times a^n = a^{(m + n)}$
2) $a^m : a^n = a^{(m - n)}$
3) $a^{m^n} = a^{(m^n)}$
4) $(a^m)^n = a^{(m \times n)}$
5) $a^n \times b^n = (a \times b)^n$
6) $a^n : b^n = (a : b)^n$

- Ultima cifra a unui pătrat perfect poate fi doar 0, 1, 4, 5, 6, 9

Probleme rezolvate:

1. **a) Arătați că numărul $610^{2021^n + 2020}$, n € N* poate fi scris ca o suma de 2 pătrate perfecte diferite și nenule.**

Soluție:

Observație: $2021^n + 2020$ este un număr impar. (pentru că este suma dintre 2021^n, care este un nr impar și 2020, care este un nr par. Și orice număr impar adunat cu orice număr par va da un număr impar.) Deci, putem înlocui (scrie) puterea $(2021^n + 2020)$ cu $2k + 1$.

Acum, înlocuim puterea în relație și obținem:

$610^{2k+1} = 610^{2k} \times 610 = (610^k)^2 \times (441 + 169) = (610^k)^2 \times (21^2 + 13^2) =$

$= [(610^k)^2 \times 21^2] + [(610^k)^2 \times 13^2] = (610^k \times 21)^2 + (610^k \times 13)^2$

Și acestea sunt cele 2 pătrate perfecte, $(610^k \times 21)^2$ și $(610^k \times 13)^2$.

b) Arătați că același număr ca la punctul anterior, $610^{2021^n + 2020}$, n € N* poate fi scris ca o suma de 3 pătrate perfecte diferite și nenule.

Soluție:

Este aceeași idee ca la punctul anterior. (Observație: $2021^n + 2020$ este un număr impar. (pentru că este suma dintre 2021^n, care este un nr impar și 2020, care este un nr par. Și orice număr impar adunat cu orice număr par va da un număr impar.) Deci, putem înlocui (scrie) puterea ($2021^n + 2020$) cu $2k + 1$.)

Și acum înlocuim puterea în relație și obținem:

$610^{2k+1} = 610^{2k} \times 610 = (610^k)^2 \times (144 + 25 + 441) = (610^k)^2 \times (21^2 + 5^2 + 12^2) =$

$= [(610^k)^2 \times 21^2] + [(610^k)^2 \times 5^2] + [(610^k)^2 \times 12^2] = (610^k \times 21)^2 + (610^k \times 5)^2 + (610^k \times 12)^2$

Și acestea sunt cele 3 pătrate perfecte, $(610^k \times 21)^2$, $(610^k \times 5)^2$ și $(610^k \times 12)^2$.

2. **Fie numerele A si B:**

$A = (2021^1 \times 2021^2 \times 2021^3 \times \ldots \times 2021^{42}) + 2 \times (2021^1 \times 2021^3 \times 2021^5 \times \ldots \times 2021^{59})$;

$B = 2021^3 + k$.

Găsiți cel mai mic număr $k \in N^*$ astfel încât $\frac{A}{B}$ să fie cub perfect.

Soluție:

$2021^1 \times 2021^2 \times 2021^3 \times \ldots \times 2021^{42} = 2021^{1+2+3+4+\ldots+42} = 2021^{(42\times43)/2} = 2021^{903}$

$2 \times (2021^1 \times 2021^3 \times 2021^5 \times \ldots \times 2021^{59}) = 2 \times 2021^{1+3+5+\ldots+59}$

$1 + 3 + 5 + \ldots + 59 =$

Sunt $\frac{59-1}{2} + 1 = 30$ numere

Deci, suma este $1 + 3 + 5 + \ldots + 59 = \frac{(59+1) \times 30}{2} = \frac{60 \times 30}{2} = 30 \times 30 = 900$

Acum ne întoarcem la relația notară

Numărul este 2×2021^{900}

$A = 2021^{903} + 2 \times 2021^{900}$

$$\left.\begin{array}{l} A = 2021^{900} \times (2021^3 + 2) \\ B = 2021^3 + k \\ 2021^{900} \text{ este cub perfect} \end{array}\right\} => k = 2$$

$B = 2021^3 + 2$

$\frac{A}{B} = \frac{2021^{900} \times (2021^3 + 2)}{(2021^3 + 2)}$ = 2021^{900} si 2021^{900} este cub perfect.

RASPUNS FINAL: k = 2

3. Fie mulțimea A = {n € ℕ | $\frac{7^n+4^n}{5}$ € ℕ}

a) Stabiliți dacă 2021 si 2022 aparțin mulțimii A.

b) Stabiliți dacă suma oricăror 2 numere din A aparține mulțimii A.

c) Stabiliți dacă suma oricăror 2021 numere din A aparține mulțimii A.

Soluție:

Notez cu U(n) ultima cifră a numărului n.

a) Având în vedre faptul că $U(7^n)$ se repetă din 4 în 4, verificăm cazurile n = 4k, n = 4k + 1, n = 4k + 2, n = 4k + 3, unde k € ℕ.

n = 4k => $u(7^n) = 1$

n = 4k + 1 => $u(7^n) = 7$

n = 4k +2 => $u(7^n) = 9$

n = 4k +3 => $u(7^n) = 3$

Acum verificăm $U(4^n)$, pentru tot aceleași cazuri, și anume n = 4k, n = 4k + 1, n = 4k + 2, n = 4k + 3, unde k € ℕ.

n = 4k => $u(4^n) = 6$

n = 4k + 1 => $u(4^n) = 4$

n = 4k +2 => $u(4^n) = 6$

n = 4k +3 => $u(4^n) = 4$

$7^n + 4^n \vdots 5$ => $U(7^n + 4^n)$ € {0, 5}

Verificăm dacă $U(7^n + 4^n)$ € {0, 5}

n = 4k => $U(7^n + 4^n) = 7$ ✗

n = 4k + 1 => $U(7^n + 4^n) = 1$ ✗

n = 4k + 2 => $U(7^n + 4^n) = 5$ ✓

n = 4k + 3 => $U(7^n + 4^n) = 7$ ✗

Deci in A aparțin toate numerele de forma $4k + 2 \Rightarrow 2021$ nu aparține mulțimii si 2022 € A.

RĂSPUNS FINAL: 2021 nu aparține mulțimii A

2022 aparține mulțimii A

b) Fie *a* și *b* cele 2 numere, cu $a = 4k + 2$ si $b = 4p + 2$, $\{k, p\}$ € $\mathbb{N}$

$a + b = 4k + 2 + 4p + 2 = 4(k + p) + 4 = 4(k + p + 1) \neq M_4 + 2 = 4k + 2$

RĂSPUNS FINAL: Suma oricăror 2 numere din mulțimea A nu aparține mulțimii A.

c) Fie $a_1, a_2, a_3, ..., a_{2021}$ cele 2021 numere.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 4k_1 + 2 \\ a_2 = 4k_2 + 2 \\ a_3 = 4k_3 + 2 \\ a_4 = 4k_4 + 2 \\ . \\ . \\ . \\ a_{2021} = 4k_{2021} + 2 \end{array}\right\} +$$

$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2021} = 4(k_1 + k_2 + k_3 + \ldots k_{2021}) + 2 \times 2021 = 4(k_1 + k_2 + k_3 + \ldots k_{2021}) + 4042 = 4(k_1 + k_2 + k_3 + \ldots k_{2021}) + 4 \times 1010 + 2 = 4(k_1 + k_2 + k_3 + \ldots k_{2021} + 1010) + 2 = M_4 + 2 = 4k + 2 \Rightarrow$ suma oricăror 2021 de numere din mulțimea A aparține mulțimii A.

4. Arătați că $(5^n + 3^n)^{2021} \times 5^{2021} + 7^{2021}$ nu poate avea 2021 divizori, oricare ar fi n € $\mathbb{N}^*$.

Soluție:

$U(5^n) = 5 =$ impar

$U(3^n) =$ impar

$U(5^n + 3^n) =$ par $\Rightarrow$ $U(5^n + 3^n)^{2021} =$ par

Deci $U((5^n + 3^n)^{2021} \times 5^{2021}) =$ par $\times 5 = 0$

Si $U((5^n + 3^n)^{2021} \times 5^{2021} + 7^{2021}) = U(0 + 7^{2021}) = U(7^{2021}) = 7$

Deci $U((5^n + 3^n)^{2021} \times 5^{2021} + 7^{2021}) = 7$

2021 este un număr impar si numerele care au un număr impar de divizori sunt pătratele perfecte. Dar acest număr se termina în 7 si ultima cifră a unui pătrat perfect poate fi doar 0, 1, 4, 5, 6, 9. Deci numărul $(5^n + 3^n)^{2021} \times 5^{2021} + 7^{2021}$ nu este pătrat perfect, deci nu poate avea un număr impar de divizori.

NOTA: Filmarea prezentării lecției de matematica am transmis-o pe adresa de email echipa@viitoriolimpici.ro, prin intermediul WeTransfer, fiind disponibila doar 7 zile. O put pune oricând la dispoziția comisiei de concurs, la solicitarea dvs, pe care va rog sa mi-o trimiteți pe adresa mea de mail smtbv08@gmail.com.