**Problema 4.** Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ şi $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0 \quad \text{şi} \quad x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1.$$

Arătaţi că printre numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ există două al căror produs este cel mult egal cu $-1/n$.

*Soluţie:* Fie $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ astfel încât $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_i < 0 \leq x_{i+1} \leq \ldots \leq x_n$. Atunci:

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_i^2 \leq x_1x_1 + x_1x_2 + \ldots + x_1x_i =$$

$$= x_1(x_1 + x_2 + \ldots + x_i) = -x_1(x_{i+1} + x_{i+2} + \ldots + x_n) \leq -(n-i)x_1x_n.$$

Analog,

$$x_{i+1}^2 + x_{i+2}^2 + \ldots + x_n^2 \leq x_n(x_{i+1} + x_{i+2} + \ldots + x_n) =$$

$$= -x_n(x_1 + x_2 + \ldots + x_i) \leq -ix_1x_n.$$

Adunând cele două relaţii obţinute, rezultă

$$1 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leq -nx_1x_n,$$

deci $x_1x_n \leq -1/n$.