Problema 2
Etapa 5
Clasa a IX-a

Problema 2. Considerăm toate punctele planului colorate cu albastru. Dacă $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, colorăm cu roşu exact n puncte din plan astfel încât oricare trei să fie necoliniare.

a) Demonstraţi că se poate construi un cerc care să treacă prin cel puţin trei puncte roşii şi să nu conţină niciun alt punct roşu în interior.

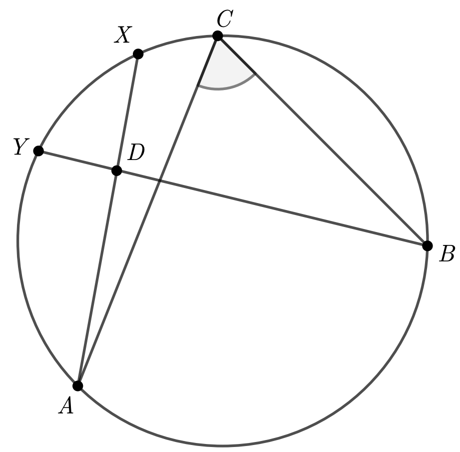
b) Arătaţi că există un cerc care să treacă prin cel puţin trei puncte roşii şi să conţină în interiorul său toate celelalte puncte roşii.

***

Soluţie. a) Există două puncte roşii printre cele n astfel încât toate celelalte puncte roşii să se afle situate de o singură parte a dreptei determinate de ele. Aceste puncte se pot obţine în felul următor: mulţimea punctelor roşii fiind finită, există o dreaptă astfel încât toate punctele roşii să fie situate într-un singur semiplan determinat de ea. Translatăm această dreaptă până întâlneşte primul punct roşu şi o rotim în jurul acestui punct până trece prin alt punct roşu. Aceste puncte sunt cele căutate, să le notăm A şi B.

Considerând toate unghiurile $\widehat{AXB}$, unde X aparţine mulţimii de puncte roşii, alegem punctul roşu C astfel încât $\widehat{ACB}$ să fie maxim.

Vom arăta că cercul care trece prin punctele A, B şi C este cel căutat. Într-adevăr, fie D un alt punct roşu. Atunci $\widehat{ADB} \leq \widehat{ACB} < 180°$ (deoarece A, B, C sunt necoliniare). Dacă D s-ar afla în interiorul cercului, măsura unghiului $\widehat{ADB}$ ar fi $\frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{XY}\right)$, unde X şi Y sunt celelalte puncte de intersecţie ale cercului cu dreptele AD, respectiv BD, deci strict mai mare decât unghiul maxim $\widehat{ACB}$. Rezultă că D se află în exteriorul cercului. Cum punctul D era arbitrar, punctul a) este rezolvat.



b) Procedăm similar cu punctul a), doar că alegem punctul C astfel încât unghiul $\widehat{ACB}$ să fie minim.