Problema 3. Un paralelipiped are volumul $216\,cm^3$ şi aria totală $216\,cm^2$. Demonstraţi că paralelipipedul este cub.

Soluţie. Fie $a = AB$, $b = AA'$, $c = AD$, $A_1 = A_{ABB'A'}$, $A_2 = A_{ABCD}$, $A_3 = A_{ADD'A'}$ şi V volumul paralelipipedului. Arătăm că $V^2 \leq A_1A_2A_3$ cu egalitate dacă şi numai dacă paralelipipedul este dreptunghic.

Fie $A'M \perp (ABCD)$ şi $A'N \perp AB$. Avem $V = A'M \cdot A_2 \leq A'N \cdot A_2 = \frac{A_1}{a} \cdot A_2$. Analog, $V \leq \frac{A_1A_3}{b}$, $V \leq \frac{A_2A_3}{c}$, de unde rezultă $V^3 \leq \frac{A_1^2A_2^2A_3^2}{abc}$. De asemenea, cum $V = A_2 \cdot A'M \leq ac \cdot AA' = abc$, rezultă $V^4 \leq A_1^2A_2^2A_3^2$, deci $V^2 \leq A_1A_2A_3$, iar cazul de egalitate se atinge când $AA' \perp AB \perp AD \perp AA'$.

Pe de altă parte,

$$A_1A_2A_3 \leq \left(\frac{A_1 + A_2 + A_3}{3}\right)^3 = 36^3 = 216^2 = V^2,$$

de unde rezultă $A_1 = A_2 = A_3$, iar paralelipipedul este cub.