ViitoriOlimpici.ro

Problema 2
Etapa 7
Clasa a V-a

Problema 2. Se consideră numerele naturale a, b și c astfel încât $ab = 2c$, $bc = 5a$ și $ca = 13b$. Calculați $a^2 + b^2 + c^2$.

* * *

Soluție: Dacă $a = b = c = 0$, atunci sunt verificate relațiile din enunț și $a^2 + b^2 + c^2 = 0$.

1. Dacă $a \neq 0$, atunci din $ab = 2c$ obținem $b = \dfrac{2c}{a}$ și relația $ca = 13b$ devine $ca = \dfrac{26c}{a}$ de unde $c = 0$ sau $a^2 = 26$.

Dacă $c = 0$, din $bc = 5a$ deducem că $a = 0$, imposibil.

Dacă $a^2 = 26$, cum a este număr natural, rezultă relația nu poate fi adevărată.

2. Dacă $b \neq 0$, atunci din $bc = 5a$ obținem $c = \dfrac{5a}{b}$ și relația $ab = 2c$ devine $ab = \dfrac{10a}{b}$ de unde $a = 0$ sau $b^2 = 10$.

Dacă $a = 0$, din $ca = 13b$ deducem că $b = 0$, imposibil.

Dacă $b^2 = 10$, cum b este număr natural, rezultă relația nu poate fi adevărată.

3. Dacă $c \neq 0$, atunci din $bc = 5a$ obținem $b = \dfrac{5a}{c}$ și relația $ca = 13b$ devine $ca = \dfrac{65a}{c}$ de unde $a = 0$ sau $c^2 = 65$.

Dacă $a = 0$, din $ab = 2c$ deducem că $c = 0$, imposibil.

Dacă $c^2 = 65$, cum c este număr natural, rezultă relația nu poate fi adevărată.