Problema 4. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \to (0, 2)$, $f(x) = \{x\} + \left\{\frac{x}{2}\right\}$.

a) Demonstraţi că f nu este injectivă, dar este surjectivă.

b) Demonstraţi că există o infinitate de funcţii $g : (0, 2) \to \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, astfel încât pentru orice $x \in (0, 2)$, $(f \circ g)(x) = x$.

Dana Heuberger

Soluţie. a) Pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ şi $k \in \mathbb{Z}$, $f(x + 2k) = f(x)$, deci f nu este injectivă.

Dacă $x \in (0, 1)$, atunci $f(x) = \frac{3x}{2}$, deci $f((0, 1)) = \left(0, \frac{3}{2}\right)$.

Dacă $x \in (1, 2)$, atunci $f(x) = \frac{3x}{2} - 1$ şi $f((1, 2)) = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

Rezultă că $(0, 2) = f((0, 1)) \cup f((1, 2)) \subset \mathrm{Im} f \subset (0, 2)$, deci $\mathrm{Im} f = (0, 2)$, aşadar f este surjectivă.

b) Pentru orice $k \in \mathbb{Z}$, funcţiile

$$g_k : (0, 2) \to \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \quad g_k(x) = \begin{cases} \frac{2x}{3} + 2k, & x \in \left(0, \frac{3}{2}\right) \\ \frac{2x - 4}{3} + 2k, & x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right) \end{cases}$$

sunt soluţii.