Problema 1
Etapa 5
Clasa a IX-a

Problema 1. Rezolvaţi în mulţimea $\mathbb{R}$ ecuaţia $\dfrac{\{x\}}{x}+\dfrac{x}{[x]}=\dfrac{3}{2}$.

***

Soluţie. Trebuie ca $x \neq 0$ şi $[x] \neq 0$, deci $x \in \mathbb{R} \setminus [0,1)$. Ecuaţia se scrie $\dfrac{\{x\}}{[x]+\{x\}}+\dfrac{[x]+\{x\}}{[x]}=\dfrac{3}{2}$, de unde $2\cdot\left(\dfrac{\{x\}}{[x]}\right)^2+3\cdot\left(\dfrac{\{x\}}{[x]}\right)-1=0$. Rezultă $\dfrac{\{x\}}{[x]}=\dfrac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$.

Pentru $x \geq 1$, avem $\{x\}=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{4}\cdot[x]$ şi cum $\{x\}<1$, deducem că $[x]\in\{1,2,3\}$. Obţinem soluţiile $x\in\left\{\dfrac{1+\sqrt{17}}{4},\dfrac{1+\sqrt{17}}{2},\dfrac{3(1+\sqrt{17})}{4}\right\}$.

Pentru $x<0$, avem $\{x\}=-\dfrac{3+\sqrt{17}}{4}\cdot[x]$ şi cum $\{x\}<1$, deducem că $[x]>\dfrac{-4}{3+\sqrt{17}}=\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}>-1$, adică $[x]\in\mathbb{N}$, contradicţie cu $x<0$.