

SOLUȚIE

Problema 3.

Determinați numerele naturale nenule x , y și numărul prim p care verifică egalitatea:

$$x^{2021} + y^{2021} = pxy.$$

Aurel Bârsan

Soluție:

Fie $d = (x, y)$, $x = da$, $y = db$, cu $(a, b) = 1$. Înlocuind în relația dată obținem

$$d^{2021}(a^{2021} + b^{2021}) = d^2 pab,$$

adică

$$d^{2019}(a^{2021} + b^{2021}) = pab. (\star)$$

Rezultă $a|d^{2019}b^{2021}$. Dar cum $(a, b) = 1$, rezultă $a|d^{2019}$. Analog $b|d^{2019}$. Cum $(a, b) = 1$, rezultă $ab|d^{2019}$. Deci $d^{2019} = abk$. Înlocuind în (\star) , obținem

$$abk(a^{2021} + b^{2021}) = pab \Leftrightarrow k(a^{2021} + b^{2021}) = p.$$

Rezultă $k = 1$ și $p = a^{2021} + b^{2021} = (a + b)(a^{2020} - a^{2019}b + \dots + b^{2020})$. Presupunând că $a \neq b$, de exemplu $a > b$, obținem

$$a^{2020} - a^{2019}b + \dots + b^{2020} = a^{2019}(a - b) + a^{2017}b^2(a - b) + \dots + b^{2020} > 1$$

și, cum $a + b > 1$, obținem contradicție cu faptul că p este prim.

Deci $a = b = 1$ și atunci $p = 2$ și $x = y = 1$.