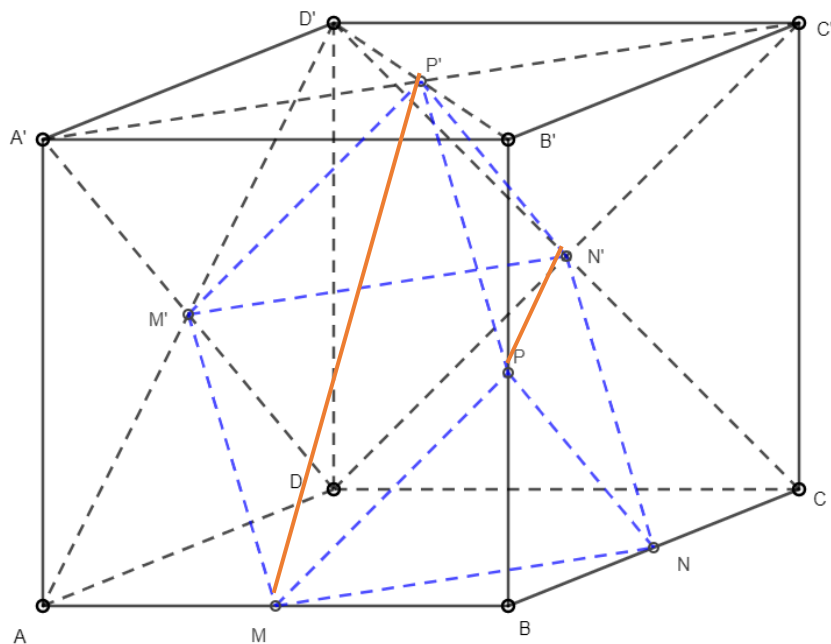
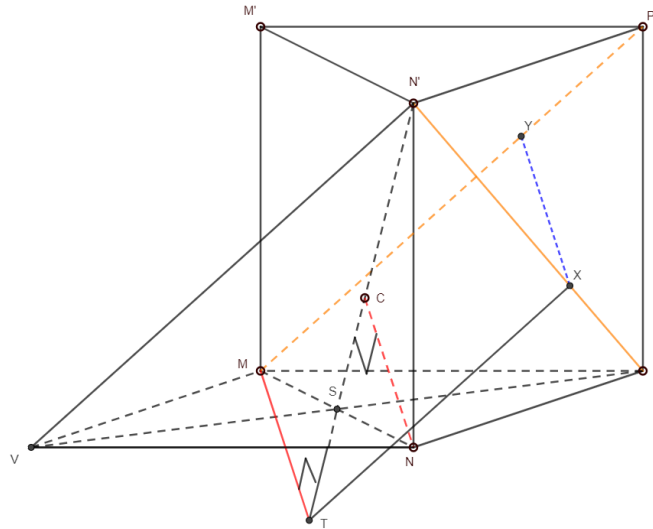


3. Fie cubul $ABCD A'B'C'D'$ în care punctele M și P sunt mijloacele muchiilor (AB) respectiv (BB') , iar P' și N' centrele fețelor $A'B'C'D'$ respectiv $CDD'C'$. Calculați distanța între dreptele MP' și PN' în funcție de muchia cubului $AB = a$, unde a este număr real strict pozitiv.

(*Petru Braica, Satu Mare*)

Soluție. Problema este dificilă dacă o privim strict în *cub*. Dacă însă o privim în *prisma triunghiulară regulată* înscrisă în cub, $MNPM'N'P'$ care face obiectul problemei 3 etapa 1, devine una destul de ușoară întrucât se cere distanța între două diagonale necoplanare în fețele unei prisme triunghiulare regulate cu muchia bazei jumătate din diagonala feței cubului, iar muchia laterală egală cu jumătate din diagonala cubului.





Considerăm prisma triunghiulară $MNPM'N'P'$.

Vom construi simetricul lui P față de mijlocul segmentului MN , notat în al doilea desen cu S . Fie V acest simetric. Din S mijloc pentru MN și PV obținem că $MPNV$ este paralelogram deci MV paralel și congruent cu NP ca și $N'P'$, așadar $VMP'N'$ este un paralelogram, deci MP' paralelă cu VN' . Deoarece distanța între două drepte necoplanare poate fi privită ca distanța de la un punct al primei drepte la un plan determinat de a doua dreaptă cu o paralelă la prima dreaptă, vom calcula distanța de la punctul M la planul $(VN'P)$, pentru că M este punct al dreptei MP' iar planul $(VN'P)$ este paralel cu dreapta MP' . Fie T proiecția lui M pe planul $(VN'P)$, T este punct al dreptei NS . Dacă notăm cu C proiecția punctului N pe dreapta SN' din congruența triunghiurilor MTS cu NCS avem că $MT = NC$. Prin urmare distanța căutată este lungimea lui $NC = MT$. În triunghiul $N'NS$ cu teorema lui Pitagora obținem $NS = a \frac{\sqrt{14}}{4}$, iar din a doua teorema a înălțimii în același triunghi $NC = NS \cdot NN' / N'S = a \frac{\sqrt{21}}{14}$.

Observație. Pentru construcția perpendicularei comune putem trasa paralela prin T la MP' care taie PN' în punctul X iar paralela prin X la MT , XY , cu Y pe MP' va fi perpendiculara comună a celor două drepte necoplanare. Cu asta problema este complet rezolvată.