Problema 1

Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Considerăm numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (0,1)$ și $t_n = n \cdot \dfrac{a_1 a_2 \ldots a_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$.

Demonstrați că $\sum_{i=1}^{n} \log_{a_i} t_n \geq n(n-1)$.

Soluție. Din inegalitatea mediilor avem:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n \cdot a_1 a_2 \ldots a_n} \geq \frac{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}}{a_1 a_2 \ldots a_n} \quad \Rightarrow \quad t_n \leq (a_1 a_2 \ldots a_n)^{\frac{n-1}{n}}$$

Cum $a_i \in (0,1)$, $\forall i = \overline{1,n}$, prin logaritmare în baza a_i, rezultă:

$$\log_{a_i} t_n \geq \frac{n-1}{n} \cdot \log_{a_i} (a_1 a_2 \ldots a_n), \ \forall i = \overline{1,n}.$$

Adunând membru cu membru inegalitățile de mai sus, obținem:

$$\sum_{i=1}^{n} \log_{a_i} t_n \geq \frac{n-1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \log_{a_i} (a_1 a_2 \ldots a_n) =$$

$$= \frac{n-1}{n} \cdot \left[n + \underbrace{\left(\log_{a_1} a_2 + \log_{a_2} a_1 \right)}_{\geq 2} + \ldots + \underbrace{\left(\log_{a_n} a_{n-1} + \log_{a_{n-1}} a_n \right)}_{\geq 2} \right] \geq$$

$$\geq \frac{n-1}{n} \cdot \left(n + 2C_n^2 \right) = \frac{n-1}{n} \left(n + n(n-1) \right) = n(n-1) \quad \text{Q.E.D.}$$