Problema 2
Etapa 6
Clasa a VI-a

Problema 2. Demonstrați că

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x = 7a+3,\ a \in \mathbb{N}\} \cap \{y \in \mathbb{N} \mid y = 6b+4,\ b \in \mathbb{N}\} = \{z \in \mathbb{N} \mid z = 42c+10,\ c \in \mathbb{N}\}.$$

* * *

Soluție: Se știe că, pentru două mulțimi A și B, $A = B$ dacă și numai dacă $A \subset B$ și $B \subset A$.

Trebuie arătat că:

1. Dacă $n \in \{x \in \mathbb{N} \mid x = 7a+3,\ a \in \mathbb{N}\} \cap \{y \in \mathbb{N} \mid y = 6b+4,\ b \in \mathbb{N}\}$, atunci $n \in \{z \in \mathbb{N} \mid z = 42c+10,\ c \in \mathbb{N}\}$.

2. Dacă $n \in \{z \in \mathbb{N} \mid z = 42c+10,\ c \in \mathbb{N}\}$, atunci $n \in \{x \in \mathbb{N} \mid x = 7a+3,\ a \in \mathbb{N}\} \cap \{y \in \mathbb{N} \mid y = 6b+4,\ b \in \mathbb{N}\}$.

1. Dacă $n \in \{x \in \mathbb{N} \mid x = 7a+3,\ a \in \mathbb{N}\} \cap \{y \in \mathbb{N} \mid y = 6b+4,\ b \in \mathbb{N}\}$ atunci $n = 7a+3$ (*) și $n = 6b+4$ (**)

Înmulțind relația (**) cu 7 și relația (*) cu 6 obținem $7n = 42b+28$, respectiv $6n = 42a+18$.

Scăzând cele două relații rezultă $n = 42(b-a)+10$, adică $n \in \{z \in \mathbb{N} \mid z = 42c+10,\ c \in \mathbb{N}\}$. Avem $c = b-a$

2. Dacă $n \in \{z \in \mathbb{N} \mid z = 42c+10,\ c \in \mathbb{N}\}$, atunci $n = 42c+10$.

Acum $n = 42c+10 = 42c+7+3 = 7(6c+1)+3$ ceea ce implică $n \in \{x \in \mathbb{N} \mid x = 7a+3,\ a \in \mathbb{N}\}$ (***). Avem $a = 6c+1$.

Pe de altă parte $n = 42c+10 = 42c+6+4 = 6(7c+1)+4$, adică $n \in \{y \in \mathbb{N} \mid y = 6b+4,\ b \in \mathbb{N}\}$ (****). Avem $b = 7c+1$.

Din (***) și (****) rezultă $n \in \{x \in \mathbb{N} \mid x = 7a+3,\ a \in \mathbb{N}\} \cap \{y \in \mathbb{N} \mid y = 6b+4,\ b \in \mathbb{N}\}$.