SOLUȚIE

Problema 1

Rezolvaţi ecuaţia $\log_5(1+\sqrt{x}) = \log_{16} x$.

***

Soluţie. Din condiţii obţinem $x \in (0, \infty)$. Notând $\log_{16} x = y$, obţinem $x = 16^y$ şi $1 + \sqrt{x} = 5^y$. Ecuaţia devine $1 + 4^y = 5^y$ sau, echivalent,

$$\left(\frac{1}{5}\right)^y + \left(\frac{4}{5}\right)^y = 1 \tag{1}$$

Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(t) = \left(\frac{1}{5}\right)^t + \left(\frac{4}{5}\right)^t$ este strict descrescătoare, deci injectivă, prin urmare ecuaţia $f(y) = 1$ are cel mult o soluţie. Observând că $f(1) = 1$, rezultă că ecuaţia (1) are soluţia unică $y = 1$.

Atunci $\log_{16} x = 1$, deci $x = 16$ este unica soluţie a ecuaţiei date.