Problema 2. Fie numerele complexe nenule a, b, c, d, astfel încât

$$a \cdot |bcd| + b \cdot |cda| + c \cdot |dab| + d \cdot |abc| = 0.$$

Dacă $|(a-b)(c-d)| \leqslant 3\sqrt{|abcd|}$, demonstraţi că $|(a-d)(b-c)| \geqslant \sqrt{|abcd|}$.

Dana Heuberger

Soluţie. Fie $\dfrac{a}{|a|} = x$, $\dfrac{b}{|b|} = y$, $\dfrac{c}{|c|} = z$, $\dfrac{d}{|d|} = v$ şi punctele $X(x)$, $Y(y)$, $Z(z)$, $V(v)$, $O(0)$ în planul complex. Avem $|x| = |y| = |z| = |v| = 1$ şi împărţind egalitatea din enunţ la $|abcd| \neq 0$, aceasta devine $x+y+z+v = 0$. Fie $S(x+v)$ şi $T(y+z)$. Avem $z_T + z_S = 0$, deci O este mijlocul lui (TS). Rezultă că $XOVS$ şi $YOZT$ sunt romburi congruente (eventual degenerate), aşadar $\widehat{XOS} = \widehat{VOS} = \widehat{ZOT} = \widehat{YOT}$. (1)

Cazul I. Dacă ordinea punctelor, în sens trigonometric, sau invers trigonometric, este V, X, Y, Z, din (1) deducem că $O \in (XZ)$ şi $O \in (YV)$.
Presupunem că $\mu(\widehat{AOB}) > \dfrac{2\pi}{3}$. În acest caz, $\cos(\widehat{AOB}) < -\dfrac{1}{2}$ şi rezultă:

$$|a-b|^2 = AB^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2|a| \cdot |b| \cdot \cos(\widehat{AOB}) > |a|^2 + |b|^2 + |a| \cdot |b| \geqslant 3|ab|.$$

Deoarece $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$, deducem analog că $|c-d|^2 > 3|cd|$, aşadar avem $|(a-b)(c-d)| > 3\sqrt{|abcd|}$, fals. În consecinţă, $\mu(\widehat{AOB}) = \mu(\widehat{COD}) \leqslant \dfrac{2\pi}{3}$, deci $\mu(\widehat{AOD}) = \mu(\widehat{BOC}) \geqslant \dfrac{\pi}{3}$, aşadar $\cos(\widehat{AOD}) = cos(\widehat{BOC}) \leqslant \dfrac{1}{2}$. Obţinem:

$$AD^2 = |a-d|^2 = AB^2 = |a|^2+|d|^2-2|ad| \cdot \cos(\widehat{AOD}) \geqslant |a|^2+|d|^2-|ad| \geqslant |ad|,$$

şi analog $BC = |b-c|^2 \geqslant |bc|$, deci $|(a-d)(b-c)| \geqslant \sqrt{|abcd|}$.

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $\mu(\widehat{AOB}) = \mu(\widehat{COD}) = \dfrac{2\pi}{3}$ şi $|a| = |b| = |c| = |d|$.

Cazul II. Dacă ordinea punctelor, în sens trigonometric, sau invers trigonometric, este V, X, Z, Y, deducem analog că $O \in (XY)$ şi $O \in (ZV)$, deci $\mu(\widehat{AOB}) = \mu(\widehat{COD}) = \pi$, de unde rezultă $|(a-b)(c-d)| \geqslant 4\sqrt{|abcd|}$, fals.