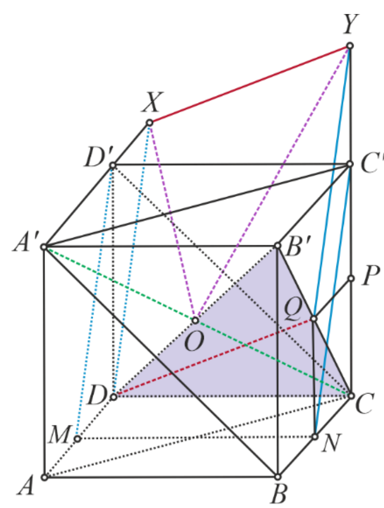
Problema 3. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ de latură a și centru O și punctele $X \in (A'D'$, $Y \in (CC'$, astfel încât $A'X = CY = \frac{3a}{2}$.

a) Demonstrați că $XY \parallel (B'DC)$.

b) Demonstrați că $\sphericalangle((A'BC),(ACC')) = \sphericalangle XOY$ și calculați măsura unghiului XOY.

***



Soluție. Fie mijloacele M, N, P ale muchiilor AD, BC, respectiv CC', O centrul cubului și Q centrul feței $BCC'B'$.

a) Se arată ușor că patrulaterele $DMD'X$, $MNC'D'$ și $QNC'Y$ sunt paralelograme, deci $XD \parallel D'M \parallel C'N \parallel YQ$ și $XD = D'M = C'N =$ $= YQ$. Cum $XD \parallel YQ$ și $XD = YQ$, rezultă că patrulaterul $XYQD$ este paralelogram, deci $XY \parallel DQ$. Dar $DQ \subset (B'DC)$, iar $X \notin (B'DC)$, deci $XY \parallel (B'DC)$.

b) Observăm că $(A'BCD') \cap (ACC'A') = A'C$.

Fie $Y' \in CC'$ astfel încât $Y'O \perp A'C$.

Deoarece $ACC'A'$ este dreptunghi, avem $\sphericalangle A'C'C = \sphericalangle Y'OC = 90°$ și cum $\sphericalangle A'CC' = \sphericalangle Y'CO$, rezultă că $\Delta\, A'C'C \sim \Delta\, YOC$. Obținem $\frac{Y'C}{A'C} = \frac{OC}{CC'}$, așadar $Y'C = \frac{3a}{2} = YC$, adică $Y' = Y$ și $OY \perp A'C$. Analog se arată că $OX \perp A'C$. În consecință, $\sphericalangle((A'BC),(ACC')) = \sphericalangle XOY$.

Eventual din triunghiul $C'XY$ $(\sphericalangle XC'Y = 90°)$, se arată ușor că $XY = \frac{a\sqrt{6}}{2} = OX = OY$, deci $\sphericalangle XOY = 60°$.