Problema 1. 100 de pietricele se împart în k grămezi nevide. Spunem despre o împărțire că este ***bună*** dacă:

- oricare două grămezi au număr diferit de pietricele și
- oricum am împărți o grămadă în două grămezi nevide mai mici, printre cele ***k + 1*** grămezi formate vor exista două care au același număr de pietricele.

Determinați cea mai mică și cea mai mare valoare posibilă a lui k.

(*Revista Komal, 2024)*

Soluție. Răspuns: valoarea minimă este 10, valoarea maximă este 13. Vom demonstra mai întâi că nu putem avea o împărțire bună în mai mult de 13 grămezi. Într-adevăr, dacă $k \geq 14$, grămezile au în total cel puțin $1 + 2 + . . . + 14 > 100$ de pietricele, contradicție. Pentru $k = 13$ avem următoarea împărțire bună: $\{1, 2, 3, . . . , 11, 12, 22\}$. Este evident că oricum am împărți o grămadă în două mai mici, două din cele 14 grămezi obținute vor fi egale. Așadar, numărul maxim de grămezi posibile este 13. În continuare vom arăta că numărul minim de grămezi este 10. Pentru $k = 10$ avem următoare împărțire bună: $\{1, 3, 5, . . . , 19\}$: într-adevăr, oricum am împărți o grămadă în două grămezi mai mici, una din grămăjoarele formate are număr impar de pietricele, ori o grămadă la fel de numeroasă există deja. Arătăm că nu există împărțire bună în $k < 10$ grămezi. Presupunem contrariul. Dacă nu avem grămadă de 1, atunci $n = (n-1)+1$ arată că existența unei grămezi de n pietre implică existența unei grămezi de $n-1$ pietre. Continuând argumentul, ajungem la contradicție (dacă avem grămadă cu n pietre avem grămezi cu $n - 1$, $n - 2$, . . . , 2, 1 pietre, contradicție cu presupunerea cum că n-am avea grămadă cu o piatră). Dacă grămada cea mai mare are $2m + 1$ pietre, cum $2m + 1 = 1 + (2m) = 2 + (2m - 1) = . . .$, trebuie să avem: fie grămadă de 1, fie grămadă de 2m, trebuie să avem fie grămadă de 2, fie grămadă de $2m - 1$, etc, deci trebuie să avem cel puțin m grămezi. Dacă grămada cea mai mare are 2m pietre, la fel, trebuie sa avem cel puțin m grămezi. (*) Dacă $k \leq 8$, atunci cea mai mare grămadă poate avea maxim 16 pietre, dar $1 + 16 + 15 + 14 + ... + 10 = 92 < 100$, contradicție. Dacă $k = 9$, grămada cea mai mare are cel mult 18 pietre. Ne uităm la cea mai mică grămadă dintre cele care au mai mult de 10 pietre. Conform (*), avem cel puțin 5 grămezi care au cel mult 10 pietre fiecare. De asemenea, a doua cea mai mică grămadă are cel mult 4 pietre, deci numărul de pietre este cel mult $1 + 4 + 8 + 9 + 10 + 18 + 17 + 16 + 15 = 98 < 100$.