SOLUȚIE

Problema 2
Demonstrați că oricare af fi numerele reale $a, b, c > 0$, pentru care $a+b+c = 3$, este adevărată inegalitatea:

$$\frac{a^2}{\sqrt{b^3c}} + \frac{b^2}{\sqrt{c^3a}} + \frac{c^2}{\sqrt{a^3b}} \geq \frac{9}{a^2+b^2+c^2}.$$

Ștefan-Ionel Dumitrescu

Soluție:

Flosind inegalitatea mediilor AM-GM, obținem:

$$\sqrt{b^3c} = \sqrt{b^2 \cdot bc} \leq \frac{b^2+bc}{2}$$

deci

$$\frac{a^2}{\sqrt{b^3c}} \geq \frac{2a^2}{b^2+bc}$$

și analoagele.
Așadar, avem:

$$\frac{a^2}{\sqrt{b^3c}} + \frac{b^2}{\sqrt{c^3a}} + \frac{c^2}{\sqrt{a^3b}} \geq 2\left(\frac{a^2}{b^2+bc} + \frac{b^2}{c^2+ca} + \frac{c^2}{a^2+ab}\right).$$

Folosind Inegalitatea Bergström -Titu Andreescu, găsim:

$$\frac{a^2}{b^2+bc} + \frac{b^2}{c^2+ca} + \frac{c^2}{a^2+ab} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}.$$

Ținând cont că $a+b+c=3$ și $ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2$ obținem:

$$\frac{a^2}{\sqrt{b^3c}} + \frac{b^2}{\sqrt{c^3a}} + \frac{c^2}{\sqrt{a^3b}} \geq 2\frac{9}{2(a^2+b^2+c^2)} = \frac{9}{a^2+b^2+c^2},$$

ceea ce trebuia demonstrat.
Avem egalitate dacă și numai dacă $a=b=c=1$.