Problema 4
Etapa 6
Clasa a VI-a

Problema 4. Determinați numerele prime a, b, c și d pentru care numărul $M = \dfrac{3a + 22b + 6c}{12d}$ este natural.

* * *

Soluție: Numărul M este natural dacă $12d \mid 3a + 22b + 6c$, de unde tragem concluzia că $3a + 22b + 6c$ este număr par.

Cum $22b$ și $6c$ sunt numere pare rezulă că $3a$ este număr par, de unde a este număr par.

Dar a este număr prim, deci $\boxed{a = 2}$

Cu aceasta $M = \dfrac{6 + 22b + 6c}{12d} = \dfrac{2(3 + 11b + 3c)}{12d} = \dfrac{3 + 11b + 3c}{6d}$.

Dacă M este număr natural avem $6d \mid 3 + 11b + 3c$, de unde deducem că $3 + 11b + 3c$ este număr par.

Dacă $b \geq 3$ și $c \geq 3$ atunci b și c sunt numere impare (pentru că sunt numere prime) și atunci $3 + 11b + 3c$ este număr impar. De aici rezultă $b = 2$ sau $c = 2$.

Dacă $b = 2$ obținem $M = \dfrac{25 + 3c}{6d}$. Cum $3 \mid 6d$ deducem că $3 \mid 25 + 3c$ și deoarece $3 \mid 3c$ rezultă $3 \mid 25$, ceea ce este fals.

În concluzie $\boxed{c = 2}$ și $M = \dfrac{9 + 11b}{6d}$.

Deoarece $3 \mid 6d$ trebuie ca $3 \mid 9 + 11b$ și cum $3 \mid 9$ deducem că $3 \mid 11b$.

Pentru că $3 \nmid 11$ rezultă $3 \mid b$ și cum b este număr prim obținem $\boxed{b = 3}$

Acum, $M = \dfrac{42}{6d} = \dfrac{7}{d}$.

Cum M trebuie să fie număr natural avem $d \mid 7$ și cum d este număr prim rezultă $\boxed{d = 7}$