Problema 2.
Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz.$$

***

Soluţie:
Vom demonstra, folosind coborârea infinită, că singura soluție este $(0, 0, 0)$.

Membrul drept al ecuației este par, rezultă că în membrul stâng exact un termen este par sau toți termenii sunt pari.

Dacă exact un termen este par, atunci membrul drept este divizibil cu 4 și membrul stang este $M_4 + 2$, contradicție.

Prin urmare, toți termenii sunt pari, deci $x = 2x_1, y = 2y_1, z = 2z_1$ și

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 4x_1y_1z_1.$$

Folosind aceeași metodă, obținem $x_1 = 2x_2, y_1 = 2y_2, z_1 = 2z_2$ și

$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = 8x_2y_2z_2.$$

Rezultă din nou că x_2, y_2, z_2 sunt pari și așa mai departe, adică:

$$x = 2x_1 = 2^2x_2 = ... = 2^nx_n = ...,$$

$$y = 2y_1 = 2^2y_2 = ... = 2^ny_n = ...,$$

$$z = 2z_1 = 2^2z_2 = ... = 2^nz_n = ...$$

Deci x, y, z sunt divizibile cu 2^n pentru orice număr natural n, prin urmare $x = y = z = 0$.