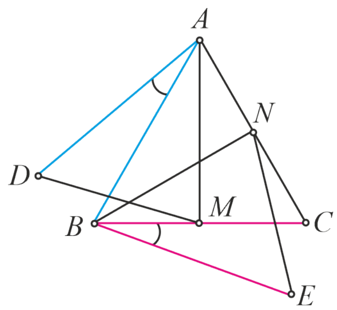
Problema 3. Fie triunghiul ABC şi punctele D, E, M, N, astfel încât M este mijlocul lui (BC), N este mijlocul lui (AC), $(DM) \cap (AB) \neq \emptyset$, $(EN) \cap (BC) \neq \emptyset$, $AD = AB$, $BE = BC$ şi $\widehat{DAB} \equiv \widehat{EBC}$.

Demonstraţi că triunghiurile ADM şi BEN sunt asemenea dacă şi numai dacă triunghiul ABC este echilateral.

Dana Heuberger



Soluţia 1. Într-un reper cartezian oarecare, notăm cu literele mici corespunzătoare afixele punctelor din problemă. Considerăm că triunghiul ABC este orientat în sens trigonometric. Avem $m = \dfrac{b+c}{2}$, $n = \dfrac{c+a}{2}$ şi din ipoteză deducem $\dfrac{c-b}{e-b} = \dfrac{b-a}{d-a} = \cos t + i \cdot \sin t$, unde $t = \mu\left(\widehat{DAB}\right) = \mu\left(\widehat{EBC}\right)$.

Notăm $\alpha = \cos(-t) + i \cdot \sin(-t)$ şi obţinem $\dfrac{e-b}{c-b} = \dfrac{d-a}{b-a} = \alpha$, deci $e = b \cdot (1-\alpha) + c \cdot \alpha$ şi $d = a \cdot (1-\alpha) + b \cdot \alpha$.

Dar $\triangle ADM \sim \triangle BEN \Leftrightarrow a(e-n) + d(n-b) + m(b-e) = 0$.

Înlocuind în egalitatea precedentă m, n, d şi e cu valorile de mai sus, obţinem:

$$\triangle ADM \sim \triangle BEN \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca \Leftrightarrow \triangle ABC \text{ este echilateral.}$$

Soluţia 2. Notăm $AB = c, BC = a, CA = b$.

Din $\triangle ADM \sim \triangle BEN$ rezultă $\mu\left(\widehat{BAM}\right) = \mu\left(\widehat{CBN}\right)$ şi $\dfrac{AM}{c} = \dfrac{BN}{a}$ (1)

Aplicând teorema sinusurilor în $\triangle AMC$, obţinem $\dfrac{b}{\sin\left(\widehat{AMC}\right)} = \dfrac{AM}{\sin C}$.

Aplicând teorema sinusurilor în $\triangle BNC$, obţinem $\dfrac{a}{\sin\left(\widehat{BNC}\right)} = \dfrac{BN}{\sin C}$.

Rezultă $\dfrac{BN \cdot \sin\left(\widehat{BNC}\right)}{a} = \dfrac{AM \cdot \sin\left(\widehat{AMC}\right)}{b}$.

Folosind (1) şi notând $\mu\left(\widehat{BAM}\right) = \mu\left(\widehat{CBN}\right) = \alpha$, obţinem:

$$\sin\left(\widehat{BNC}\right) = \frac{c}{b} \cdot \sin\left(\widehat{AMC}\right) \Leftrightarrow \sin(A+B-\alpha) = \frac{c}{b} \cdot \sin(B+\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(A+B-\alpha) = \frac{\sin C}{\sin B} \cdot \sin(B+\alpha) \Leftrightarrow \sin(C+\alpha) \cdot \sin B = \sin C \cdot \sin(B+\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \sin\alpha \cdot \sin(B-C) = 0 \Leftrightarrow B = C \Leftrightarrow b = c.$$

Folosind teorema medianei în (1), rezultă că $a = b = c$.