3. Fie ***n*** un număr natural mai mare decât 2, ***k*** un număr real strict pozitiv și M = { 1, 2, … , n }. Asociem fiecărei submulțimi nevide a lui M câte un punct distinct din plan iar pentru orice două submulțimi distincte, dacă mediile aritmetice ale elementelor sale diferă cu cel mult ***k***, unim punctele asociate acestora printr-un segment.

Determinați valoarea minimă a lui ***k*** astfel încât punctele asociate oricăror două submulțimi nevide diferite ale mulțimii M sunt unite printr-un segment sau o linie frântă.

Cristi Săvescu, Cluj Napoca

Soluție.

Notăm cu m_A media elementelor mulțimii A. Observăm că pentru orice submulțime nevidă $A \subseteq M$, diferită de { 1 }, fie avem $m_A \geq 2$, dacă $A \subseteq \{ 2, 3, \dots, n \}$, fie $m_A = \frac{1+|B|\cdot m_B}{1+|B|}$, dacă $A = \{1\} \cup B$, cu B = { 2, 3, … , n }, caz în care $m_A = \frac{1+|B|\cdot m_B}{1+|B|} \geq \frac{1+|B|\cdot 2}{1+|B|} \geq \frac{3}{2}$.

Întrucât mulțimea { 1 } trebuie să fie conectată cu cel puțin o submulțime A diferită de { 1 }, deducem că are loc $k \geq 1/2$.

Pentru a arăta că numărul ½ este minimul căutat, observăm că:

1) *Avem $1 \leq m_A \leq n$, pentru orice submulțime nevidă $A \subseteq M$ (1).*
2) *Orice două submulțimi de câte un element sunt conectate printr-un șir de submulțimi (2).*

Într-adevăr, pentru $k < p$, considerăm șirul de submulțimi:

$$\{ k \}, \{ k, k+1 \}, \{ k+1 \}, \{ k+1, k+2 \}, \dots \{ p-1, p \}, \{ p \}.$$

Diferența dintre mediile elementelor oricăror două submulțimi din acest șir este ½. Atunci plecând de la orice submulțimi nevide A și B, care au mediile elementelor m_A, m_B, considerăm n_A, n_B cei mai apropiați întregi de m_A, respectiv m_B. Atunci conform observației (1) avem că $n_A, n_B \in [1,n]$ și considerăm șirul de submulțimi A, $S_{nA,nB}$, B, unde $S_{nA,nB}$ notează șirul descris la observația (2) pentru submulțimile $\{ n_A \}$ și $\{ n_B \}$.

Așadar valoarea minimă a lui k este ½.