Problema 4. Să se determine funcția: f : R −→ R cu proprietatea :

$$f\,(x + a\,b\,) \;\le\; bx \;\le\; f(x) + a,$$

pentru orice număr real x, unde a și b sunt numere reale strict pozitive.

(Dumitru Bătinețu Giurgiu, Gazeta Matematică)

SOLUȚIE: Punând $x \to x-\frac{a}{b}$ în proprietatea din enunț,

$f\left(x-\frac{a}{b}+\frac{a}{b}\right) = f(x) \le b\left(x-\frac{a}{b}\right) = bx-a \le f\left(x-\frac{a}{b}\right)+a$, de unde: $f(x) \le bx-a$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ (1).

Pe de altă parte, din inegalitatea din enunț,

$$f(x)+a \ge bx \Rightarrow f(x) \ge bx-a,\ \forall x \in \mathbb{R}\ (2).$$

Din relațiile (1) și (2), rezultă că $f(x) = bx-a$, pentru orice număr real x.

Într-adevăr, funcția $f(x) = bx-a$ verifică proprietatea din enunț:

$f\left(x+\frac{a}{b}\right) = b\left(x+\frac{a}{b}\right) - a = bx+a-a = bx \le bx \le f(x)+a =$

$= bx-a+a = bx$, deci inegalitatea este satisfăcută cu egalitate.

În concluzie, $f(x) = bx-a$.