SOLUŢIE

4. Fie triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle C = 90°$ în care $\sphericalangle B > 30°$. Pe laturile AB şi AC se consideră punctele D şi respectiv E astfel încât $AD < AE$. Dacă F este simetricul punctului D faţă de BC, arătaţi că $AF > BE$.

Soluţie. Considerăm punctul P pe AE, între A şi E, astfel încât $AP = AD$, iar punctul M simetricul lui A faţă de dreapta BC.

Cum $\sphericalangle ABC > 30°$ rezultă că $\sphericalangle BAC < 60°$. Fie punctul N pe dreapta BC de aceeaşi parte a lui C ca şi punctul B astfel încât $\sphericalangle NAC = 60°$. Deducem că B este situat între C şi N şi $AN > AB$.

Deoarece BC este mediatoarea segmentelor AM, respectiv DF, $AM \neq DF$, obţinem că patrulaterul $AMFD$ este trapez isoscel, deci $AF = MD$.

Considerăm punctul Q pe dreapta AC de aceeaşi parte a lui A ca şi C astfel încât $AQ = AB$. Atunci $MD > QD$. Cum triunghiurile ABP şi AQD sunt congruente (L.U.L.) rezultă că $BP = QD$, deci $AF = MD > QD = BP$ şi, cum $BP > BE$, obţinem că $AF > BE$.