SOLUȚIE

Problema 2.
Determinați numerele întregi a, b, c pentru care

$$a^2 + b + 3 < 5a,\ \ b^2 + c + 3 < 5b,\ \ c^2 + a + 3 < 5c.$$

Dan Nedeianu, Gazeta Matematică

Soluţie:
Dacă x, y sunt numere întregi și $x < y$, atumci $x + 1 \leq y$. Folosind această observație, rezultă

$$a^2 + b + 4 \leq 5a,\ \ b^2 + c + 4 \leq 5b,\ \ c^2 + a + 4 \leq 5c.$$

Adunând ultimele trei relații și grupând convenabil termenii obținem

$$(a-2)^2 + (b-2)^2 + (c-2)^2 \leq 0,$$

de unde rezultă $a = b = c = 2$.
Aceste valori verifică relațiile inițiale, deci $(a, b, c) = (2, 2, 2)$.