Problema 4
Etapa 6
Clasa a VII-a

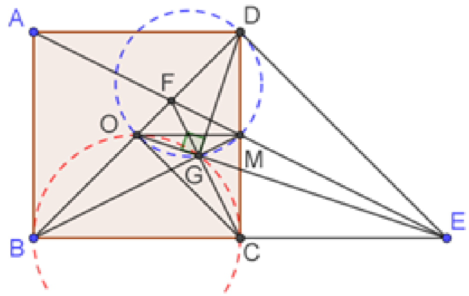
**Problema 4.** Fie $ABCD$ un pătrat de centru $O$. Notăm cu $E$ simetricul lui $B$ faţă de $C$. Notăm cu $F$ intersecţia dintre dreptele $AE$ şi $BD$, iar cu $G$ intersecţia dintre dreptele $OE$ şi $CF$. Arătaţi că:

a) punctele $B, G$ şi $M$ sunt coliniare,

b) $DG \perp OE$.

*Bud Adrian*

**Soluţie**




a) În $\Delta ABE$, $MC$ este linie mijlocie, deci $BA = 2MC = 2DM$.

$\Delta AFB \sim \Delta MFD$ şi astfel $\dfrac{AF}{MF} = \dfrac{FB}{FD} = \dfrac{BA}{DM} = 2$.

Din $AF = 2MF$ rezultă $AM = 3MF$ sau $ME = 3MF$.

Din $BF = 2DF$ rezultă $BO + OF = 2(OD - OF)$ adică $OB = 3OF$.

În triunghiul $FBE$ avem $\dfrac{FO}{OB} \cdot \dfrac{BC}{CE} \cdot \dfrac{EM}{MF} = 1$, de unde conform reciprocei teoremei lui Ceva rezultă coliniaritatea punctelor $B, G$ şi $M$.

b) Din a) rezultă $EF = 4MF$. În triunghiul $MBE$ aplicăm teorema lui Menelaos pentru transversala $F - G - C$ şi avem $\dfrac{MG}{GB} \cdot \dfrac{BC}{CE} \cdot \dfrac{EF}{FM} = 1$ de unde rezultă $GB = 4MG$ şi astfel $BM = 5GM$.

În triunghiul $BCM$ avem $BM^2 = BC^2 + CM^2 = \dfrac{5l^2}{4}$ de unde rezultă $BM = \dfrac{l\sqrt{5}}{2}$ şi astfel $GM = \dfrac{l\sqrt{5}}{10}$. $BM \cdot GM = \dfrac{l\sqrt{5}}{2} \cdot \dfrac{l\sqrt{5}}{10} = \dfrac{l^2}{4} = MC^2$ astfel că $CG$ este înălţime în triunghiul $BCM$ confom reciprocei teoremei catetei, adică $CG \perp BM$. Am notat cu $l$ latura pătratului.

Deoarece $\sphericalangle BOC = \sphericalangle BGC = 90^\circ$ rezultă $BOGC$ este inscriptibil cu $\sphericalangle DOG = \sphericalangle GCB = \sphericalangle GMC$. Astfel şi patrulaterul $DOGM$ este inscriptibil cu $\sphericalangle DGO = \sphericalangle DMO = 90^\circ$, adică $DG \perp OE$.