Problema 3. Ce dimensiuni trebuie să aibă o cutie de conserve, în condițiile unui volum de umplere dat, notat cu **V,** dacă un procent **p** al materialului folosit se pierde în timpul confecționării fundului și capacului cutiei din cauza formei decupajului și formei materialului inițial, iar producătorul dorește să folosească o cantitate minimă de material? (Forma cutiei este una de cilindru circular drept). (Folclor)

Soluție. Fie R raza cerclui de la baza cilindrului circular drept și h înălțimea cutiei, R și h numere reale strict pozitive. Volumul cutiei este:

$$V = \pi R^2 h.$$

Cantitatea de tinichea folosită pentru confecționarea suprafeței este:

$$F = 2\pi R h + 2(1+p)\pi R^2.$$

Deci căutăm valoarea minimă a expresiei F ca funcție cu variabila R, cu volumul V de valoare dată. Astfel avem că $h = \frac{V}{\pi R^2}$, iar funcția de minimizat este:

$$F: (0;\infty) \to R, \qquad F(R) = (1+p)R^2 + \frac{V}{\pi R},$$

pentru orice R strict pozitiv iar V este o constantă strict pozitivă.
Pentru a determina minimul funcției F și pentru ce valoare se atinge acest minim, vom folosi inegalitatea mediilor pentru trei numere pozitive astfel:

$$F(R) = (1+p)R^2 + \frac{V}{\pi R} = (1+p)R^2 + \frac{V}{2\pi R} + \frac{V}{2\pi R} \geq 3\sqrt[3]{\frac{(1+p)V^2}{4\pi^2}} = \min(F),$$

expresie ce nu depinde de R.
Egalitatea în inegalitate are loc pentru:

$$(1+p)R^2 = \frac{V}{2\pi R},$$

Sau $$R^3 = \frac{V}{2\pi(1+p)},$$

adică pentru: $$R = \sqrt[3]{\frac{V^2}{2\pi(1+p)}}.$$

Astfel $$h = 2(1+p)\sqrt[3]{\frac{V^2}{2\pi(1+p)}},$$

deci pentru a se obține cutia cilindrică cu consum minim de material trebuie să aibă loc egalitatea:

$$\frac{h}{2R} = 1 + p\,.$$