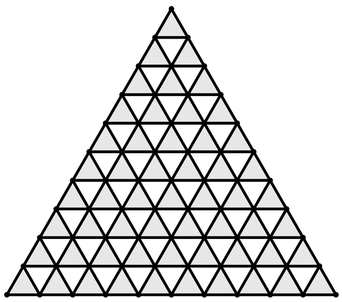
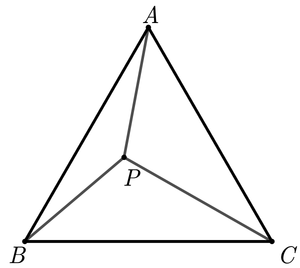
Problema 3. În interiorul unui triunghi echilateral de latură 15 se consideră 111 puncte. Demonstraţi că se poate aşeza întotdeauna o monedă circulară cu diametrul $\sqrt{3}$ astfel încât ea să acopere cel puţin trei puncte dintre cele 111 puncte date.

Nu se cere ca moneda să fie plasată în întregime în interiorul triunghiului.

***

Soluţie.





Împărţim fiecare latură a triunghiului în câte zece segmente egale, de lungime $\frac{3}{2}$. Paralelele duse prin punctele de diviziune la laturile triunghiului iniţial împart suprafaţa acestuia în $1+3+5+\ldots+19=100$ de triunghiuri echilaterale cu latura de $\frac{3}{2}$. Evident, raza cercului circumscris unui triunghi echilateral de latură $\frac{3}{2}$ este $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Colorăm cu negru triunghiurile mici direct asemenea cu triunghiul dat, ca în figură. Sunt colorate 55 de triunghiuri. Vom demonstra că discurile circumscrise celor 55 de triunghiuri colorate acoperă suprafaţa triunghiului iniţial; cu alte cuvinte, acoperă şi cele 45 de triunghiuri necolorate.

Fie ABC un triunghi necolorat şi P un punct interior acestuia. Cum $\sphericalangle APB+\sphericalangle BPC+\sphericalangle CPA=360°$, unul dintre cele trei unghiuri este cel puţin $120°$. Fie acesta $\sphericalangle APB$. Atunci P aparţine discului circumscris triunghiului colorat de latură AB.

Pentru a încheia, să observăm că din cele $111=2\cdot 55+1$ puncte, cel puţin trei se află într-unul din cele 55 de discuri.