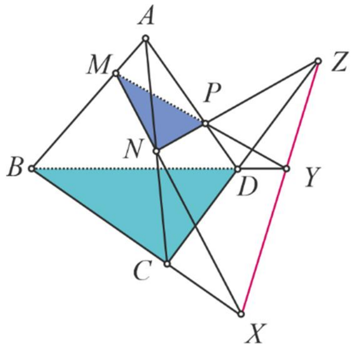
Problema 2. Se consideră un tetraedru regulat *ABCD* cu latura de 4 cm și punctele *M*, *N*, *P* pe muchiile *AB*, *AC*, respectiv *AD*. Dacă $AM < MB$, punctul *N* este mijlocul muchiei *AC*, $AP = 2\cdot DP$, $\{X\} = MN \cap BC$, $\{Y\} = MP \cap BD$, $\{Z\} = NP \cap CD$, iar $XY = 1{,}5\cdot YZ$, determinați lungimea segmentului *AM*.

***



Soluție. Punctele *X*, *Y* și *Z* se află la intersecția planelor (*ABC*) și (*MNP*), deci aparțin dreptei de intersecție a celor două plane, așadar sunt coliniare (Desargues).

Folosind teorema lui Menelaus în triunghiul *ACD*, cu transversala *N*-*P*-*Z*, obținem: $\frac{ZD}{ZC}\cdot\frac{NC}{NA}\cdot\frac{PA}{PD}=1$, adică $\frac{ZD}{ZC}\cdot 1\cdot 2=1$.

Așadar $\frac{ZD}{ZC}=\frac{1}{2}$, deci *D* este mijlocul segmentului *CZ*.

Folosind teorema lui Menelaus în triunghiul *CXZ*, cu transversala *B*-*D*-*Y*, obținem:

$\frac{DZ}{DC}\cdot\frac{BC}{BX}\cdot\frac{YX}{YZ}=1$, adică $1\cdot\frac{BC}{BX}\cdot\frac{3}{2}=1$, deci $\frac{BC}{BX}=\frac{2}{3}$, iar $\frac{XB}{XC}=\frac{3}{1}$.

Folosind teorema lui Menelaus în triunghiul *ABC*, cu transversala *M*-*N*-*X*, obținem:

$\frac{MA}{MB}\cdot\frac{XB}{XC}\cdot\frac{NC}{NA}=1$, adică $\frac{MA}{MB}\cdot\frac{3}{1}\cdot 1=1$, deci $\frac{MA}{MB}=\frac{1}{3}$, iar $\frac{MA}{AB}=\frac{1}{4}$. Așadar $MA=1\,\text{cm}$.