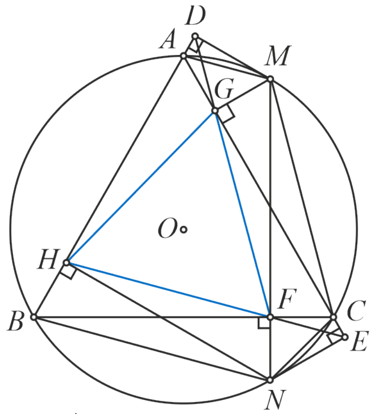
Problema 4. Se consideră triunghiul echilateral ABC şi punctele M, N pe cercul circumscris acestuia, astfel încât $M \in \overset{\frown}{ACB}$, $\overset{\frown}{AM} = 30^\circ$ şi $MN \perp BC$. Fie $D \in AB$ şi $E \in AC$, astfel încât $DM \perp AB$ şi $EN \perp AC$. Notăm cu F, G, H intersecţiile perechilor de drepte MN şi BC, DF şi AC, respectiv EF şi AB. Demonstraţi că triunghiul FGH este echilateral.

Dana Heuberger



Soluţie. $MF \perp BC$, $MD \perp AB$, iar $DF \cap AC = \{G\}$, deci G este intersecţia dintre AC şi dreapta lui Simson asociată punctului M şi triunghiului ABC, aşadar $MG \perp AC$.

Analog, din $NF \perp BC$, $NE \perp AC$ şi $EF \cap AB = \{H\}$ rezultă că H este intersecţia dintre AB şi dreapta lui Simson asociată punctului N şi triunghiului ABC, deci $NH \perp AB$.

Deoarece $\triangle\ ABC$ este echilateral, avem $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CA} = 120^\circ$. Obţinem:

$90^\circ = \widehat{BFM} = \dfrac{1}{2}\left(\overset{\frown}{BAM} + \overset{\frown}{CN}\right) = \dfrac{1}{2}\left(150^\circ + \overset{\frown}{CN}\right)$, deci $\overset{\frown}{CN} = 30^\circ$, iar $\overset{\frown}{BN} = \overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{CN} = 90^\circ$.

Din $\widehat{CFM} = \widehat{CGM} = 90^\circ$ rezultă că patrulaterul $CFGM$ este inscriptibil, deci $\widehat{GFM} = \widehat{GCM} = \widehat{ACM} = \dfrac{\overset{\frown}{AM}}{2} = 15^\circ$.

Mai mult, $\widehat{ACN} = \dfrac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BN}}{2} = 105^\circ$, deci $\widehat{ECN} = 180^\circ - \widehat{ACN} = 75^\circ$, iar $\widehat{CNE} = 90^\circ - \widehat{ECN} = 15^\circ$.

Cum $\widehat{CEN} = \widehat{CFN} = 90^\circ$, patrulaterul $CENF$ este inscriptibil, deci $\widehat{BFH} = \widehat{CFE} = \widehat{CNE} = 15^\circ$, iar $\widehat{GFH} = \widehat{BFM} - \widehat{BFH} - \widehat{GFM} = 60^\circ$.

Apoi, $\widehat{BNM} = \dfrac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AM}}{2} = 75^\circ$ şi $\widehat{AMN} = \widehat{ACN} = 105^\circ$. Deoarece $\widehat{BNM}$ şi $\widehat{AMN}$ sunt suplementare, rezultă că $AM \parallel BN$. Aşadar $AMNB$ este un trapez inscriptibil, deci este isoscel. Rezultă că $\triangle\ BHN \equiv \triangle\ NFB$ (I.U.), deci $BH = NF$. Obţinem că $AH = AB - BH = MN - NF = MF$, aşadar $AM \parallel FH$.

$\widehat{MAG} = \widehat{MAC} = \dfrac{\overset{\frown}{MC}}{2} = 45^\circ$, deci triunghiul MAG este dreptunghic isoscel, cu $AG = MG$. În consecinţă, G se află pe mediatoarea segmentului AM, care este şi mediatoarea segmentului FH, deci $GF = GH$.

$\triangle\ FGH$ are $\widehat{GFH} = 60^\circ$ şi $GF = GH$, deci este echilateral.