SOLUȚIE

Problema 3

Fie $a, b \in \mathbb{C}$ şi funcţia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = az + b\overline{z}$. Arătaţi că funcţia f este bijectivă dacă şi numai dacă $|a| \neq |b|$.

***

Soluţie. Vom folosi următorul rezultat cunoscut:
Lemă. Se consideră $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma' \in \mathbb{R}$ şi sistemul de ecuaţii

$$(S)\quad \begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}.$$

Sistemul (S) are soluţie unică $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă $\alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0$.

Revenind la problemă, observăm că funcţia f este bijectivă dacă şi numai dacă pentru orice $w \in \mathbb{C}$, ecuaţia $f(z) = w$ are soluţie unică $z \in \mathbb{C}$.

În cele ce urmează, pentru un număr complex z, vom nota $\mathrm{Re}\,(z) = z_1$ şi $\mathrm{Im}\,(z) = z_2$, adică $z = z_1 + z_2\,\mathrm{i}$, cu $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$. Cu această convenţie, pentru orice $w \in \mathbb{C}$, ecuaţia $f(z) = w$, adică $az + b\overline{z} = w$, devine

$$(a_1 + a_2\,\mathrm{i})(z_1 + z_2\,\mathrm{i}) + (b_1 + b_2\,\mathrm{i})(z_1 - z_2\,\mathrm{i}) = w_1 + w_2\,\mathrm{i},$$

ceea ce este echivalent cu sistemul

$$(S')\quad \begin{cases} (a_1 + b_1)z_1 - (a_2 - b_2)z_2 = w_1 \\ (a_2 + b_2)z_1 + (a_1 - b_1)z_2 = w_2 \end{cases}.$$

Conform lemei, (S') are soluţie unică $(z_1, z_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă $(a_1 + b_1)(a_1 - b_1) + (a_2 + b_2)(a_2 - b_2) \neq 0$, adică $a_1^2 - b_1^2 + a_2^2 - b_2^2 \neq 0$, ceea ce este echivalent cu $|a| \neq |b|$.