SOLUŢIE

Problema 3. Comparaţi numerele $a = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{2021}$ şi $b = 2 \cdot \left(1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{1211}\right)$.

* * *

Soluţie: Avem $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ şi $3^n + 2 \cdot 3^n = 3^{n+1}$ pentru orice n număr natural.

Atunci $a = 2+2+2^2+2^3+\ldots+2^{2021}-1 = 2^2+2^2+2^3+\ldots+2^{2021}-1 = 2^3+2^3+\ldots+2^{2021}-1 = 2^{2022}-1$ şi $b = 1+2+2\cdot3+2\cdot3^2+2\cdot3^3+\ldots+2\cdot3^{1211}-1 = 3^2+2\cdot3^2+2\cdot3^3+\ldots+2\cdot3^{1211}-1 = 3^3+2\cdot3^3+\ldots+2\cdot3^{1211}-1 = 3^{1212}-1$.

Trebuie comparat 2^{2022} cu 3^{1212}.

Avem $3^{1212} = 3^3)^{404} = 27^{404}$.

Pe de altă parte $2^{2022} > 2^{2020} = \left(2^5\right)^{404} = 32^{404} > 27^{404} = 3^{1212}$.

În concluzie $a > b$.