Problema 1. Determinaţi termenul general al şirului de numere reale $(a_n)_{n\geqslant 1}$, ştiind că $a_1 = 3$ şi, pentru orice număr natural nenul n, are loc egalitatea: $a_1 \cdot C_n^1 + a_2 \cdot C_n^2 + \ldots + a_n \cdot C_n^n = \frac{2^n}{n+1} \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$.

Marian Ursărescu, problema 23886, Gazeta Matematică 3 / 1998

Soluţie. Pentru $n = 2$, relaţia din enunţ devine:

$$a_1 \cdot C_2^1 + a_2 \cdot C_2^2 = \frac{4}{3} \cdot (a_1 + a_2) \Leftrightarrow a_2 = 2a_1 = 6.$$

Pentru $n = 3$, obţinem $a_1 \cdot C_3^1 + a_2 \cdot C_3^2 + a_3 \cdot C_3^3 = \frac{8}{4} \cdot (a_1 + a_2 + a_3)$. Deoarece $a_2 = 2a_1$, rezultă $3a_1 + 6a_1 + a_3 = 6a_1 + 2a_3$, deci $a_3 = 3a_1 = 9$. Demonstrăm prin inducţie că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 3n$.

Evident, $a_1 = 3 \cdot 1$. Fie $m \in \mathbb{N}^*$. Presupunem că pentru orice $k = \overline{1, m}$, avem $a_k = 3k$ şi demonstrăm că $a_{m+1} = 3(m+1)$.

Deoarece $a_1 \cdot C_{m+1}^1 + a_2 \cdot C_{m+1}^2 + \ldots + a_m \cdot C_{m+1}^m + a_{m+1} \cdot C_{m+1}^{m+1} = \frac{2^{m+1}}{m+2} \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_m + a_{m+1})$, folosind ipoteza de inducţie, deducem: $3\left(C_{m+1}^1 + 2C_{m+1}^2 + \ldots + nC_{m+1}^m\right) + a_{m+1} = \frac{2^{m+1}}{m+2} \cdot \left(\frac{3m(m+1)}{2} + a_{m+1}\right)$. Deoarece $\sum_{i=1}^{m} i \cdot C_{m+1}^i = (m+1) \sum_{i=1}^{m} \cdot C_m^{i-1} = (m+1)(2^m - 1)$, obţinem:

$$3(m+1)(2^m - 1) + a_{m+1} = 3 \cdot 2^m \cdot \frac{m(m+1)}{m+2} + \frac{2^{m+1}}{m+2} \cdot a_{m+1},$$

de unde rezultă imediat că $a_{m+1} = 3(m+1)$, aşadar conform principiului al doilea de inducţie,deducem că $a_n = 3n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.