Problema 2
Etapa 5
Clasa a VII-a

Problema 2. Pe o masă sunt 3 cutii goale C_1, C_2 și C_3. Trei elevi A_1, A_2 și A_3 se joacă un joc pe rând. Când îi vine rândul, A_1 pune o bilă în cutia C_2 sau în cutia C_3; A_2 pune o bilă în C_1 sau în C_3; iar A_3 pune o bilă în C_1 sau în C_2. Primul jucător care pune a 1999-a piesă în oricare din cele 3 cutii pierde. Arătați că indiferent de cine joacă primul și al doilea (prima data se stabilește ordinea jucătorilor, după care aceasta se păstrează pe tot parcursul jocului) A_1 și A_2 pot conspira pentru a-l face pe A_3 sa piardă.

Soluție: În primele 999 ture, A_1 pune o bilă în C_2, A_2 pune o bilă în C_1, iar A_3 va pune o bilă în C_1 sau C_2.
De la a 1000-a tură, cât timp A_3 mai poate pune o bilă in C_1 sau C_2, cel putin unul dintre A_1 și A_2 mai poate pune o bilă în C_1 sau C_2.
Daca A_1 poate pune o bilă în C_2 o va pune, iar A_2 o va pune in C_3, altfel o va pune în C_3,iar A_2 o va pune in A_1.
După 499 astfel de ture, în cutia C_3 sunt 499 de bile, iar în cutiile C_1 și C_2 sunt $3 \cdot 999 + 2 \cdot 499 = 3995$ bile.
Deci în una din următoarele 2 ture, una din cutiile C_1 și C_2 va conține 1999 bile. În aceste două ture, A_1 și A_2 vor pune câte o bilă în C_3 (aceasta va avea 503 bile, deci se poate), iar A_3 va fi obligat să pună o bilă în C_1 sau C_2, deci va pierde.