SOLUȚIE

4. Determinaţi perechile de numere întregi (x, y), $x \neq -y$, ştiind că numărul $\frac{x^2 \cdot y}{x+y}$ este egal cu puterea unui număr prim.

Soluţie: Dacă $d = (x, y)$ atunci $x = d \cdot a,\ y = d \cdot b$, iar $(a, b) = 1$.

Egalitatea $x^2 y = p^k (x + y)$ devine $d^2 \cdot a^2 \cdot b = p^k (a + b)$ (1) deci $a|p^k, b|p^k$. Deoarece numerele a,b sunt prime între ele iar p este număr prim avem două cazuri: $a = 1, b = p^i$ sau $a = p^i, b = 1$.

Dacă $a = 1, b = p^i$ egalitatea (1) devine $d^2 = p^{k-i}\left(1 + p^i\right)$. Deoarece $\left(1 + p^i, p^{k-i}\right) = 1$ avem $k-i = 2m$ şi $1+p^i = u^2$ de unde $p^i = (u + 1)(u - 1)$. Deoarece p este număr prim se obţine $u + 1 = p^s$ şi $u - 1 = p^t$ de unde $2 = p^s - p^t$.

Dacă $t \neq 0$ atunci $2 = p^t\left(p^{s-t} - 1\right)$ deci $p = 2$, $t = 1$, $s = 2$, iar $i = 3$ de unde $u = 3$, $d = 3 \cdot 2^m$, deci $(x, y) = \left(3 \cdot 2^m, 3 \cdot 2^{m+3}\right), m \in \mathbb{N}$.

Dacă $t = 0$ atunci $2 = p^s - 1$ deci $p = 3$, $s = 1$, iar $i = 1$ de unde $u = 2$, $d = 2 \cdot 3^m$, deci $(x, y) = \left(2 \cdot 3^m, 2 \cdot 3^{m+1}\right), m \in \mathbb{N}$.

Dacă $a = p^i, b = 1$ egalitatea (1) devine $d^2 = p^{k-2i}\left(p^i + 1\right)$. Deoarece $\left(1 + p^i, p^{k-2i}\right) = 1$ avem $k-2i = 2m$ şi $1+p^i = u^2$ de unde $p^i = (u + 1)(u - 1)$. Deoarece p este număr prim se obţine $u + 1 = p^s$ şi $u - 1 = p^t$ de unde $2 = p^s - p^t$.

Dacă $t \neq 0$ atunci $2 = p^t\left(p^{s-t} - 1\right)$ deci $p = 2$, $t = 1$, $s = 2$, iar $i = 3$ de unde $u = 3$, $d = 3 \cdot 2^m$, deci $(x, y) = \left(3 \cdot 2^{m+3}, 3 \cdot 2^m\right), m \in \mathbb{N}$.

Dacă $t = 0$ atunci $2 = p^s - 1$ deci $p = 3$,$s = 1$, iar $i = 1$ de unde $u = 2$, $d = 2 \cdot 3^m$, deci $(x, y) = \left(2 \cdot 3^{m+1},\ \ 2 \cdot 3^m\right), m \in \mathbb{N}$.