SOLUȚIE

Problema 2

Să se determine numerele întregi x şi y, pentru care

$$5^x - \log_2(y+3) = 3^y \text{ şi } 5^y - \log_2(x+3) = 3^x.$$

***

Soluţie. Din condiţii obţinem $x, y \in (-3, \infty) \cap \mathbb{Z}$. Scăzând egalităţile din enunţ, obţinem

$$5^x + 3^x + \log_2(x+3) = 5^y + 3^y + \log_2(y+3). \tag{1}$$

Cum funcţia $f : (-3, \infty) \to \mathbb{R}, f(t) = 5^t + 3^t + \log_2(t+3)$ este strict crescătoare, deci injectivă, din relaţia (1) rezultă $x = y$.

Rămâne să rezolvăm în $\mathbb{Z}$ a ecuaţia

$$5^x = 3^x + \log_2(x+3), \tag{2}$$

se observă că $x \in \{-2, -1, 0\}$ nu verifică (2), iar $x = 1$ este soluţie.

Pentru $x \geqslant 2$, se arată că

$$5^x \geqslant 3^x + 4^x,$$

folosind monotonia funcţiei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(t) = \left(\frac{3}{d}\right)^t + \left(\frac{4}{d}\right)^t$, iar apoi demonstrăm prin inducţie matematică inegalitatea

$$4^x > \log_2(x+3).$$