

SOLUȚIE

Enunț: Fie punctele D, E, F proiecțiile unui punct P din interiorul unui triunghi $\triangle ABC$ echilateral, de centru O . Atunci $\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{PF} = \frac{3}{2} \overrightarrow{PO}$.

Soluție: Construim prin P , paralele la laturi. În acest caz $\triangle PMN, \triangle PQR, \triangle PST$ sunt echilaterale, iar patrulele $PNCQ, PRAS, PTBM$ paralelograme. În $\triangle PMN$, PD este înălțime, deci mediană și atunci $\overrightarrow{PD} = \frac{\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN}}{2}$.

Folosind relațiile analoage, obținem

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{PF} &= \frac{\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN}}{2} \\ &+ \frac{\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR}}{2} + \frac{\overrightarrow{PT} + \overrightarrow{PS}}{2} = \frac{\overrightarrow{PN} + \overrightarrow{PQ}}{2} + \frac{\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PS}}{2} + \frac{\overrightarrow{PT} + \overrightarrow{PM}}{2} = \\ &= \frac{\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}}{2} = \frac{3\overrightarrow{PO}}{2}. \blacksquare \end{aligned}$$

