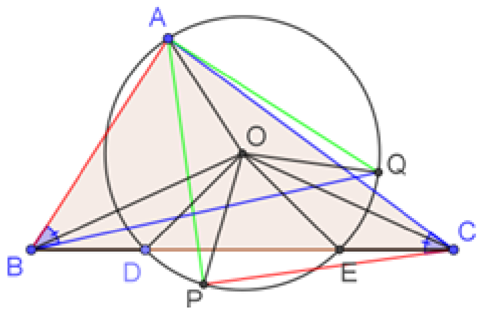
Problema 4. Pe latura BC a triunghiului ABC se consideră punctele D şi E cu $BD = CE$. Pe cercul circumscris triunghiului ADE se iau punctele P şi Q astfel încât $AB = PC$ respectiv $AC = BQ$. Arătaţi că $AP = AQ$.

Olimpiadă Rusia

Soluţie



Notăm cu O centrul cercului circumscris triunghiului ADE. O se găseşte pe mediatoarea segmentului DE astfel că el se găseşte şi pe mediatoarea segmentului BC, de unde $OB = OC$.

$\Delta OQB \equiv \Delta OAC$ (L.L.L.) şi rezultă $\sphericalangle OBQ = \sphericalangle OCA$.

$\Delta OAB \equiv \Delta OPC$ (L.L.L.) şi rezultă $\sphericalangle ABO = \sphericalangle PCO$.

Prin adunarea relaţiilor se obţine $\sphericalangle OBQ + \sphericalangle ABO = \sphericalangle OCA + \sphericalangle PCO$, adică $\sphericalangle ABQ = \sphericalangle ACP$.

Atunci şi triunghiurile ABQ şi PCA sunt congruente având $AB = CP$, $\sphericalangle ABQ = \sphericalangle ACP$ şi $BQ = CA$. De aici obţinem $AQ = AP$.