Problema 3. Fie $n, p \in \mathbb{N}^*$, cu $p < n$. Se consideră o mulţime A cu n elemente. Determinaţi numărul maxim de submulţimi ale mulţimii A, astfel încât oricare două dintre ele au în comun cel mult p elemente.

* * *

Soluţie. Fie S o mulţime de submulţimi ale lui A, cu cardinalul lui S maxim, astfel încât oricare două dintre submulţimile lui A care fac parte din S au în comun cel mult p elemente. Presupunem că există o submulţime B a lui A care are cel puţin $p+2$ elemente, astfel încât $B \in S$. Fie C o submulţime cu $p+1$ elemente a lui B. Deoarece intersecţia $B \cap C = C$ are $p+1$ elemente, rezultă că $C \notin S$. Aşadar S nu conţine niciuna dintre submulţimile cu $p+1$ elemente ale lui S. Înlocuind în S mulţimea B cu toate submulţimile sale cu $p+1$ elemente, obţinem o mulţime S' de submulţimi ale lui A care are mai multe elemente decât S, contradicţie. Aşadar S nu poate conţine submulţimi ale lui A care au mai mult de $p+1$ elemente. Evident, mulţimea $S = \{B \subset A \mid \operatorname{card}(B) \leqslant p+1\}$ are proprietatea că oricare două dintre elementele sale distincte au în comun cel mult p elemente. În consecinţă, cardinalul lui S este $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{p+1}$.