SOLUŢIE

2. Demonstraţi inegalitatea

$$\frac{2021}{2022} \geqslant \frac{4}{3^2} + \frac{4}{5^2} + \frac{4}{7^2} + \ldots + \frac{4}{4043^2}.$$

Soluţie. Folosind inegalitatea între media aritmetică şi media geometrică a numerelor naturale 1 şi 2 obţinem $\frac{1+2}{2} \geqslant \sqrt{1 \cdot 2}$, de unde, ridicând la pătrat şi inversând, avem

$$\frac{4}{3^2} \leqslant \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}.$$

În mod similar obţinem inegalitătile

$$\frac{4}{5^2} \leqslant \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3},$$

$$\frac{4}{7^2} \leqslant \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4},$$

$$\ldots$$

$$\frac{4}{4043^2} \leqslant \frac{1}{2021 \cdot 2022} = \frac{1}{2021} - \frac{1}{2022}.$$

Prin sumare acestea conduc la inegalitatea cerută.