1. Arătați că pentru orice numere reale strict pozitive a, b, c are loc inegalitatea:

$$\frac{a+b}{a+3b+2c}+\frac{b+c}{2a+b+3c}+\frac{c+a}{3a+2b+c}\geq 1,$$

și precizați când are loc egalitatea.
(***)

Soluție. Vom folosi substituțiile Radon: a + b = x, b + c = y, c + a = z, cu x, y, z numere strict pozitive. Exprimăm numitorii în funcție de x, y, z astfel:

$$a + 3b + 2c = (a + b) + 2 (b + c) = x + 2y,$$

$$2a + b + 3c = 2 (a + c) + (b + c) = 2z + y,$$

$$3a + 2b + c = 2 (a + b) + (a + c) = 2x + z.$$

Membrul stâng al inegalității se poate scrie astfel:

$$\frac{x}{x+2y}+\frac{y}{y+2z}+\frac{z}{z+2x}=$$

$$\frac{x^2}{x^2+2xy}+\frac{y^2}{y^2+2yz}+\frac{z^2}{z^2+2zx}\geq$$

$$\frac{(x+y+z)^2}{x^2+2xy+y^2+2yz+z^2+2zx}=1.$$

În primul pas am amplificat rapoartele pe rând cu x, y respectiv z, după care am aplicat forma Titu a inegalității CBS.
Egalitatea are loc pentru x = y = z sau a = b = c.