1. Pentru fiecare n număr natural notăm cu a_n prima cifră a numărului n^3.
   Arătați că numărul $A = 0,a_1a_2 \ldots a_n \ldots$ este irațional.

(*Folclor)*

Soluție:

Primii termeni ai șirului a_n sunt: 0, 1, 8, 2, 6, 1, 2, 3, 5, 7, *1*, *1*, *1*, ...

Există în șir și cifre diferite de 1.

Arătăm că numărul A poate avea oricât de multe cifre consecutive de 1 deci este irațional.

Într-adevăr pentru p număr natural oarecare, fie k număr natural pentru care are loc inegalitatea:

$$10^k > \left(\frac{p}{\sqrt[3]{2}-1}\right)^3.$$

Inegalitatea este echivalentă cu:

$$\sqrt[3]{2 \cdot 10^k} - \sqrt[3]{10^k} > p,$$

adică în intervalul:

$$\left(\sqrt[3]{10^k}, \sqrt[3]{2 \cdot 10^k}\right),$$

există cel puțin p numere naturale.

Însă pentru fiecare $n \in (\sqrt[3]{10^k}, \sqrt[3]{2 \cdot 10^k})$ avem că:

$$10^k < n^3 < 2 \cdot 10^k,$$

adică $a_n = 1$.

În concluzie numărul A nu este periodic, are o infinitate de cifre, prin urmare nu este număr rațional.