

Problema 3. Determinați numărul rațional x pentru care

$$\frac{x - 2011}{13} + \frac{x - 13}{2011} = \frac{x - 2009}{15} + \frac{x - 15}{2009}.$$

* * *

Soluție: Egalitatea se poate scrie

$$\left(\frac{x - 2011}{13} - 1\right) + \left(\frac{x - 13}{2011} - 1\right) = \left(\frac{x - 2009}{15} - 1\right) + \left(\frac{x - 15}{2009} - 1\right)$$

Aducând la același numitor în fiecare paranteză obținem

$$\frac{x - 2024}{13} + \frac{x - 2024}{2011} = \frac{x - 2024}{15} + \frac{x - 2024}{2009}$$

sau

$$\frac{x - 2024}{13} + \frac{x - 2024}{2011} - \frac{x - 2024}{15} - \frac{x - 2024}{2009} = 0$$

Scoțând factor comun pe $x - 2024$ avem

$$(x - 2024) \cdot \left(\frac{1}{13} + \frac{1}{2011} - \frac{1}{15} - \frac{1}{2009}\right) = 0$$

Cum

$$\frac{1}{13} + \frac{1}{2011} - \frac{1}{15} - \frac{1}{2009} \neq 0$$

deducem că

$$x - 2024 = 0,$$

de unde $x = 2024$.