Problema 2
Etapa 5
Clasa a V-a

Problema 2. Fie p şi q numere prime. Arătaţi că $p^2 + q^2$ nu este pătrat perfect.

MIhai Bunget, Tg.Jiu

Soluţie:

Dacă p şi q sunt mai mari sau egale cu 3, atunci ele sunt de forma $2k + 1$, deci pătratele lor vor fi de forma $4k + 1$, iar $p^2 + q^2$ va fi de forma $4k + 2$, deci nu poate fi pătrat perfect.

Rămâne că unul dintre ele trebuie să fie 2, fie acesta q.

Dacă $p = 2$ obținem $2^2 + 2^2 = 8$ care nu este pătrat perfect.

Dacă $p = 3$ obținem $3^2 + 2^2 = 13$ care nu este pătrat perfect.

Dacă $p \geq 5$, atunci $p = 3k + 1$ sau $p = 3k + 2$, unde k este număr natural.

Pentru $p = 3k+1$ obținem $(3k+1)^2+4 = \mathcal{M}3+1+4 = \mathcal{M}3+2$ care nu este pătrat perfect.

Pentru $p = 3k+2$ obținem $(3k+2)^2+4 = \mathcal{M}3+1+4 = \mathcal{M}3+2$ care nu este pătrat perfect.