Etapa finală, Ediția a XIII-a, 2022

Clasa a XI-a

Problema 1. Fie $(x_n)_n$ și $(y_n)_n$ două șiruri de numere pozitive, astfel încât

$$\max(x_{n+1},y_{n+1}) \leqslant \frac{x_n+y_n}{2}, \text{ pentru orice } n \geqslant 0.$$

Arătați că ambele șiruri sunt convergente, iar limitele lor sunt egale.

Soluție. Deoarece $\frac{x+y}{2} \leqslant \max(x,y)$, șirul $(z_n)_n$, $z_n = \max(x_n,y_n)$ este descrescător deci, cum termenii săi sunt pozitivi, are limita finită l **3p**

Dacă $(x_n)_n$ nu are limita l, cum $x_n \leqslant z_n \to l$, există $\varepsilon > 0$ și un subșir $(x_{n_k})_k$ astfel încât $x_{n_k} \leqslant l - \varepsilon$ **2p**

Rezultă $z_{n_k+1} \leqslant \frac{x_{n_k}+y_{n_k}}{2} \leqslant \frac{l-\varepsilon+z_{n_k}}{2}$ și, prin trecere la limită, $l \leqslant l - \frac{\varepsilon}{2}$ – contradicție. Așadar $x_n \to l$ și, analog, $y_n \to l$ **2p**