4. Fie n un număr natural mai mare decât 1. Într-un tablou $n \times n$ se scriu n^2 numere naturale cu suma n^2. Arătați că există două rânduri și două coloane ce determină un pătrat în vârfurile căruia sunt scrise patru numere cu suma cel puțin egală cu 4.

(*Adaptare Cristi Săvescu, Cluj Napoca*)

Soluție.
Presupunem prin reducere la absurd că nu există un astfel de subtablou. Atunci orice număr este cel mult egal cu 3 și orice două numere situate în celule alăturate au suma cel mult 3.
Dacă n este par, adică $n = 2k$, k număr natural nenul, atunci împărțim tabloul în k^2 subtablouri 2×2. Dacă toate acestea ar avea suma elementelor cel mult 3 suma totală ar fi cel mult $3k^2 < 4k^2$, contradicție.
Dacă n este impar, pentru $n = 3$, fie (a, b, c), (d, e, f), (g, h, i), rândurile tabloului. Atunci se adună inegalitățile de tipul $a + b + d + e \leq 3$ pentru cele $1^2 + 2^2 = 5$ pătrate și sumând se obține:

$$2(a + b + c + d + e + f + g + h + i) + 2e \leq 15,$$

adică $2e \leq -3$, absurd.
Dacă $n = 2k + 1$, cu k număr natural ≥ 2, izolăm prima linie și prima coloană ale tabloului și subtabloul $2k \times 2k$ rămas îl împărțim în k^2 subtablouri 2×2.
Toate acestea au suma elementelor cel mult 3, și atunci suma totală a elementelor subtabloului $2k \times 2k$ va fi cel mult $3k^2$.
Atunci:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{2k+1} + b_1 + b_2 + \ldots + b_{2k+1} \geq (2k + 1)^2 - 3k^2 = k^2 + 4k + 1,$$

unde $a_1, a_2, \ldots, a_{2k+1}$, sunt elementele primei linii și $b_1, b_2, \ldots, b_{2k+1}$ sunt elementele primei coloane, cu $a_1 = b_1$.
Avem însă $a_{2p} + a_{2p+1} \leq 3$ și $b_{2p} + b_{2p+1} \leq 3$, pentru orice $p = 1, 2, \ldots, k$, deci
$2a_1 + 6k \geq a_1 + a_2 + \ldots + a_{2k+1} + b_1 + b_2 + \ldots + b_{2k+1} \geq (2k + 1)^2 - 3k^2 = k^2 + 4k + 1$.
Atunci $2a_1 \geq (k - 1)^2 \geq 1$, deci $a_1 \geq 1$. Analog se demonstrează că toate cele patru colțuri ale tabloului mare au numere nenule, deci suma este minim 4, contradicție cu presupunerea făcută.
Așadar problema este rezolvată.