Problema 1
Etapa 7
Clasa a VII-a

Problema 1. Fie x, y, z numere reale care verifică relaţiile $x \geq 10, y \geq 20, z \geq 1020$ şi $x + y + z = 2024$. Detreminaţi valoarea maximă produsului xyz.

***

Soluţie Dacă $z \geq 1020$ şi $x + y + z = 2024$, atunci $x \leq 1020$. În aceste condiţii $(1020 - x)(1020 - z) \leq 0$, adică $1020^2 - 1020(x + z) + xz \leq 0$.

De aici se obţine $xz \leq 1020(x+z-1020)$. Înmulţim relaţia cu y, aplicăm inegalitatea mediilor şi obţinem

$$xyz \leq 1020y\left(x + z - 1020\right) \leq 1020\left(\frac{x + y + z - 1020}{2}\right)^2 = 1020 \cdot 502^2$$

valoare ce se atinge pentru $x = y = 502$ şi $z = 1020$.